MATHEMATICAI

PÁLYAMUNKÁK.

I. KÖTET.

Ára 1 ft. 12 kr. c. p.


A MAGY. TUD. AKADEMIA FŐTITKÁRI HIVATALA
Borúra derű! 1831.

MATHEMATICAI

PÁLYAMUNKÁK.

I. KÖTET.

Ára 1 ft. 12 kr. c. p.

MATHEMATICAI

PÁLYAMUNKÁK.

KIADJA

A' MAGYAR TUDÓS TÁRSASÁG.

ELSŐ KÖTET.

AZ ELSŐ ÉS MÁSOD RENDÜ GÖRBÉK' KÖZRENDESEKRE ÁTVITELE 'S FŐBB TULAJDONSÁGAIK. TAUBNER KÁROLY ÉS FEST VILMOS' ELSŐ ÉS MÁSOD RANGU PÁLYAMUNKÁIK.

BUDÁN,

A' MAGYAR KIR. EGYETEM' BETŰIVEL.

M. DCCC. XLIV.

ELŐSZÓ.

Az academiának 1838-ban tartott IX-d. nagy gyülése által kihirdetett következő mathematicai jutalomtételére:

„A' görbék' meghatározásában jelenleg a' görbe' mindenkori hossza és érintőinek (tangentes) szöge is vétetnek elemekűl. Mellyek tehát ezen nézet szerint az első és másod rendü görbék? Vitessenek ezek által öszrendesekre (coordinatae), 's adassanak elő főbb *tulajdonságaik.*"

1840. martius' 25-keig mint határnapig három pályamunka érkezett; mellyek közől az e' végre kinevezett három osztálybeli biráló', u. m. Bitnicz Lajos, Győry Sándor és Vállas Antal rendes tagok' előadása' nyomán a' XI-d. nagy gyülés, 1840. august.

27. a' II. és III. számok alattiakat találván kiadásra, és pedig amazt a' száz arany jutalomra, ezt ívenként négy arany tiszteletdíjra érdemeseknek; a' birálók' hivatalos egyértelmű tudósításaiból azon okok' kivonata bocsátatik itt közre, mellyek a' társaságot határozataiban vezették.

Először is Bitnicz Lajos rt. véleményének veleje ez: „E' két kézirat egyenest szól ugyan a' kérdéshez, de nem úgy, hogy arra teljesen megfeleljen. Így: előterjesztik, miben áll a' görbék' meghatározásának ezen új módja, kifejtik ezen mód szerint a' másod rendü görbék' fő tulajdonságait és kimutatják általjában, mint lehet az így kifejtett egyenleteket a' merőszögű öszrendesek közti egyenletekre és ezeket viszont amazokra átváltoztatni a' nélkül, hogy ezt, mint a' kérdés kivánta, minden egyes görbére külön kiterjesztenék 's így mások' elődolgozatait bővebben kifejtenék, vagy, mint várni lehete, összehasonlítván a' két rendszert, egyiknek a' másik fölötti elsőségét meghatároznák; sőt arra sem fordítának figyelmet, hogy a' görbéknek új módon kifejtett egyenleteit sarköszrendesek (polares coordinatae) közti egyenletekre 's viszont változtatták volna, holott ez a' kérdésben benfoglaltatik."

„Összehasonlítván azonban a' két kéziratot, mivel ezen jelmondatú: Égve honért bizton nézzen előre szemünk a' másod rendü görbék' egyetemi egyenletéből helyesen és teljesen kifejti azon egyenleteket, mellyek különös görbék' törvényét adják elő, azután jóval több példában mutogatja, mint pályatársa, miként lehet a' merőszögű öszrendesek közti egyenleteket az új mód szerint találtakra 's ezeket viszont amazokra átalakítani, továbbá a' kifejtett egyenletekben foglalt görbék' fő tulajdonságit egyenként vizsgálgatja, 's végre tárgyát szabatos rövidséggel 's majdnem általjában tiszta, jó nyelven adja elő, véleményadó ennek tulajdonít ugyan elsőséget 's így ennek itéli a' pályadíjt; azonban a' Concordia parvae res crescunt, discordia maximae dilabuntur jelmondatút is figyelemre 's tiszteletdíj mellett nyomtatásra méltónak tartja, minthogy a' kérdés' helyes felfogása mellett első szakaszában mintegy bevezetésül a' merőszögű öszrendesek' rendszerét is kifejtvén 's némelly görbék' ezek közti egyenletét vizsgálgatván, olvasójával mind a' két rendszert megismerteti, 's így csekély mathematicai literaturánk' egyik hézagát némiképen kipótolja."

Győry Sándor rt. véleménye így hangzott: „A' II. szám' szerzője egyenesen a' kérdésbe ereszkedvén, elsőben a' két változók közötti általános egyenletet 's annak a' változók' nőttével vagy fogytával eszközölhető átalakítását veszi szemlélet alá, melly után a' fő egyenletet a-tól h-ig nyolcz egymástól független egyenletekre osztályozza; kimutatván különösebben, hogy az utóbbi' első fokozata, mint valamelly görbének előállítója kört, 's mint nem az, egyenes vonalt vagy egyenszöget terjeszt elő."

„A' III. szám alatti az öszrendeseket illető tanítmányokat előre bocsátván, azután a' görbéknek folytonos haladás és irányváltoztatásból eredő származását fejtegetvén, hasonlag az első fokozatú egyenlet' vizsgálatára tér, 's ezt a' II. szám allattinál részletesben tárgyalja. Ismét a' II. számu ezen túl a' még hátralevő 7 egyenlet' további fejtegetése körül forgolódik, mellyeket egyenként bontogatván, 17 különböző görbéknek egyenleteit állítja elő. A' III. számu viszont még mindig részletesebben, de a' feltett kérdés' utólsó kivánatához: adassanak elő főbb tulajdonságaik, mintegy kora készülettel azon nézeteket adja elő, mellyek a' görbék körülti vizsgálatokban mint azoknak főbb tulajdonságai, tekintetbe jöhetnek. Melylyek után midőn a' fő egyenlet' bontogatásához érkezik, abban 's következőleg a' kérdés' érdemében szembetünőleg hátrább marad. Ugyan is: Alapúl vevén hogy w és l értékei szerint ha az A és C ösztevők vagy azoknak egyike = o; a' fő egyenlet előleges átváltoztatás nélkül nem használható, ennek következtében legelébb is a' II. számban a, k, c, g, alatt feltett egyenleteket kellett volna vizsgálat alá fognia, melly helyett, midőn a' nevezett II. számu pályairat f, alatti egyenletét választja, nem csak az egyenesen kikövetkeztethető egyenleteket mellőzi, hanem egyszersmind felvévén A=B=o, az előbocsátmányokban nem említett új feltételt hoz szemléletei közé. Egyébiránt ezekből egy görbének egyenletét találván $w=al^2$, abból a' másikat, a' váltó görbe' egyenletét $l = aw^2$ csupa értelmités (definitio) által hozza ki. Általmegy azután a' II. számu pályairatban g,-vel jegyzett egyenlet' vizsgálatára, honnét találja w =

$\frac{a}{1}$ nem csak a' II. számu pályairatban előadott, hanem az általa követett úton is egyenesen feltaláltatható többi egyenletek' mellőzésével berekeszti; melylyeket a' II. szám' szerzője biztosabb alapon építve, következetesen, hiány és kivétel nélkül bontogatott."

„A' kérdés' második része ez vala: Vitessenek által öszrendesekre. E' tekintetben mind a' két értekező csupán az általános szabályt adván elő: miképen lehessen bizonyos w és s közti egyenletet x és y merőleges öszrendeseiközöttire átalakítani? sem egyik sem másik teljesen nem felelt."

„A' harmadik részt illetőleg: Adassanak elő főbb tulajdonságaik, a' két pályairat' öszvehasonlítása úgy áll, mint a' kérdés' első részében már előterjesztettük. T. i. a' II. szám alatti keresztűlmegyen az általa kimutatott minden egyenletek körülti vizsgálatokon, 's itt is, mint az első részben, megelőzi a' III-dikat, kinek ebbeli szemléletei az elősorozásba szőve, természetesen csupán azon néhány görbékre terjednek, mellyeknek egyenleteit felhozá."

„Ezeknél fogva jutalmazandónak ugyan, a' II. szám alatti pályairatot tartjuk; több tekintetekből azonban a' III. számunak is érdemei vagynak. Sok részletes vizsgálatokat és ismereteket foglal magában, mellyek kivált az elébbihez csatolva, a' görbék' természetének 's tulajdonságainak felvilágosítására szolgálhatnak 's így ezt is kinyomatásra ajánlja."

Végre Vállas Antal rt ez ügyben ekkép nyilatkozott: „Az 1838-ban kitűzött mathematicai kérdésnek három egymástól lényegesen különböző része volt. Az elsőre: „Mellyek az eredeti nézet szerint, melly eleműl a' hosszat és az érintői szögeket veszi, az első és másodrendü görbék?" a' felelet annál könnyebb volt, minthogy e' része a' kérdésnek ki van dolgozva már. A' másodikra, melly követeli, hogy a' talált görbék' egyenletei öszrendesekre vitessenek által, elődolgozataink nem levén, a' felelet azon okból is nehezebb, minthogy az átvitel hihetőleg csak bonyolódottabb egészítések' utján lehetséges. Ez vala azon mező, mellyen a' pályázó tudományát látathatta. A' harmadik résznek, melly szerint a' mondott görbéknek főbb tulajdonságai kivántattak, az a' czélja volt, hogy részint a' már kimutatott görbékkel magokkal, részint pedig az új módnak sajátságaival 's netán elsőbbségével ismerkedjünk meg. Mutathattak ittis tudományt és gyakorlottságot a' pályázók; mert véleményadó' nézete szerint a' két módnak egymássali összehasonlítása igen tanulságos és tán eredménydús lehete. Mindenben pedig, mi egyébiránt magában érthető, megkivántatott, hogy az előadás rendszeres, a' nyelv grammaticailag tiszta és szabatos legyen.“

E' szempontok' kimutatása után, az I. számúnak, mint a' melly a' kérdést e' biráló szerint is félre értvén, nem is versenyezhetett, mellőztével így vélekedik a' más két munkáról: „Helyesen fogta fel a' kérdés' első és némileg harmadik részét a' II. számú felelet' irója. Ez rendszeresen és gyakorlottságot mutató rövidséggel fejtegeti a' másod rendű görbék' általános egyenletét, és hozzá kapcsolja, mint különös esetet, az első rendüét is. Kimutatja azután a' módot, melly szerint a' talált és elősorozott egyenleteket öszrendesekre vihetni át — a' nélkül azonban, hogy e' módot, mint kivántatott, az egyes görbékre alkalmazná. Ez által azon része a' munkának, mellyben eredeti lehetett, hiányzik. Hasonlólag csak a' hosszak és szögek' nézete szerint adja elő a' talált görbék' tulajdonságait, mi által az eredetiség' dicsőségétől a' kérdésnek e' harmadik részében is elesik. Különben a' nyelv, némelly kivételekkel, eléggé szabatos. E' munkát véleményadó minden esetre kiadandónak tartja."

„A' III. számú felelet legelűl is az analyticai mértan' némelly tételeit foglalja magában, mit hibáúl, ámbár a' dologhoz szorosan nem tartozik, véleményadó felróni a' pályázónak nem akar. Ezután átmegyen az új nézet' vizsgálására, melly részében a' munkának a' görbéknek némelly tulajdonságai magyaráztatnak. Ez sem tartozik tulajdonképen a' kérdéshez; annyiban azonban elfogadható, mennyiben az új nézet' taglalása, véleményadó' tudtával, nálunk Magyarhonban maig sem hozatott szőnyegre 's így a' szempontnak helyes felfogásához elkészítheti az olvasót. Következnek az első és másod rendű görbék, az új nézet szerint előadott tulajdonságaikkal együtt, és végül azon módnak kimutatása, melly szerint azokat öszrendesekre vihetni át. Hiányzik itt is a' kérdésnek második része, és a' harmadik részből a' két módnak összehasonlítása, azaz mind az, miben a' pályázó eredeti lehete. Az előadás nem olly rendszeres, de a' nyelv sem olly szabatos, mint a' II. számué."

„E' pályairományok közől egyik sem felelvén meg a' jutalomkérdés' eredeti 's így érdekesebb részeire — általános becs szerint itélve, a' jutalomra egyik sem tarthatna számot. Viszonyos becsöket tartva szem előtt, véleményadó a' fenebb említett okoknál fogva, a' II. számút a' kitett jutalomra; a' III. számút pedig, minthogy fogyatkozásai mellett is sok jót foglal magában és kitérései által az olvasót, a' magyart t. i., a' kitűzött szempontra elkészítheti, tiszteletdíj melletti kiadásra érdemesíti."

Itt veszi már most a' közönség a' koszorúzott, valamint a' második rangunak ismert pályamunkát is; mellyek a' társaság által kiadott kéziratok' LXXXVIII. kötetét teszik.

Költ Pesten, a' magyar tudós társaság' kis gyüléséből, julius' 29. 1844.

D. Schedel Ferencz,
titoknok.

AZ ELSŐ

ÉS

MÁSOD RENDŰ GÖRBÉK'

ÖSZRENDESEKRE ÁTVITELE

'S FŐBB TULAJDONSÁGAIK.

IRTA

D. TAUBNER KÁROLY,

M. ACAD. LT.

ELSŐ RANGU PÁLYAMUNKA.

BUDÁN,

A' MAGYAR KIR. EGYETEM' BETŰIVEL.

M. DCCC. XLIV.

Égve honért bizton nézzen előre szemünk.

Kisfaludy Károly.

NYOMTATÁSI HIBÁK.

Lap.		Sor.			
8	„	8	BB'	helyett	BP''
8	„	9	BMB	„	BMP
9	„	12	NCX	„	$M''CX$
11	„	5	B'	„	P''
11	„	6	BB'	„	BP''
13	„	1	A	„	AB
25	„	13	$y' := NP$	„	$y' : NP$
26	„	21	$A'Q'' - AQ''$	„	$A'O'' - AO''$
32	„	14	; el	„	el ;
33	„	4	$+$	„	$=$
37	„	6	QP'	„	RP'
37	„	7	$=$	„	$-$
37	„	8	UP'	„	QP'
38	„	26	$CSin\pi^2$	„	$CSin\alpha^2$
39	„	2	$DCos\alpha + ESin\alpha$	„	$DCos\alpha - ESin\alpha$
39	„	13	$rSin\alpha Cos\alpha$	„	$2Sin\alpha Cos\alpha$.
41	„	16	$\frac{B}{A-C}$	„	$\frac{-B}{A-C}$
42	„	9	vagy $= o$	„	vagy $M = o$.
45	„	13	$- o$	„	$= o$.
49	„	12	$d'mc'$	„	$d'me'$
51	„	25	$C - C'$	„	$l - l'$
52	„	12	FHN	„	IHN
52	„	13	dto	„	dto
58	„	13	A'	„	A
65	„	15	qt	„	bt
72	„	28	$Cos W : Cos W'$	„	$Cos\omega : Cos\omega'$
75	„	11	h	„	k.
81	„	21	$l + \infty$	„	$l = \infty$
82	„	1	con	„	cm
83	„	18	$l = e$	„	$l = o$
99	„	27	$d\omega$	„	$\frac{d\omega}{dl}$

AZ

ELSŐ ÉS MÁSOD RENDŰ GÖRBÉK'

ÖSZRENDESEKRE ÁTVITELE

'S FŐBB

TULAJDONSÁGAIK.

I.

Az első és másod rendű görbék' öszrendesekre átvitele.

1. §.

A' két önváltozó közt létező, minden tökéletes betüvetési (*algebrai*), második fokú egyenletnek legátalánosb alakja ez:

$$A\omega^2 + 2B\omega s + Cs^2 + 2D\omega + 2Es + F = 0 \quad (1)$$

Illynemű egyenlet hat állandó mennyiséget, *ugymint*: A, B, *C-t 'stb.* foglal magában, mellyek mindazáltal csak öt függetlennek szemlélendők, mivel helyettök az egyenletbe új állandó mennyiségek gyanánt bizonyos állandónak öt hányasa hozható. Ha tehát ω és s alatt némi két, egymástól függő mennyiséget, vagy inkább illy mennyiségek' mértékeit értjük: akkor (1) egyenlet legátalánosblag olly arányokat terjesztend azok közt elő, mellyek a' két fokú egyenlet által jeleltethetnek ki. Legyen tehát s valamelly görbe' ívének bizonyos kezdetponttól számított hoszsza, 's ω azon szög' nyilása, mellyet a' görbe' iránya érintőjének iránya által kifejezve, valamelly pont felé bizonyos kezdetiránynyal alakít: akkor a' fensorozott egyenlet a' görbék' némi meghatárzott számára nézve azon arányokat fejezendi ki, mellyek az ív' hoszsza 's érintőjének minden pontoknáli iránya közt léteznek. Ha a' görbék' felosztásánál felosztásalapúl egyenletök' fokát veszszük fel, akkor minden előállítható görbéket, mellyek (1) egyenletben foglaltatnak, második rendű görbéknek nevezendünk.

2. §.

Illynemű második rendű görbék' száma a' fenhozott második fokú egyenletnek különös egymástóli független alakíthatásától függ. Független alakok (*forma*) pedig azok, mellyek egymásra vihetetlenek. Azon görbék' száma feletti vizsgálat, mellyek (1) egyenletben foglaltatnak, vezet bennünket arra, hogy az egymástól lényegesen különböző alakok' száma, melylyeket ugyanaz (1) egyenlet előállíthat, meghatároztassék. Méltólag forog tehát kérdésben legelőször is azon módnak meghatárzata, mellynek eszközűl vételével a' kérdéses átalakítás (*transformatio*) kivitethetik. Szembeszökő azonban, hogy ezen módok csak akkor következményesek, ha a' fensorozott (1) egyenlet' alakításainak bizonyos önkéntes 's következőleg változtatásra alkalmas momentumok szolgálnak alapúl. Figyelembe véve tehát (1) egyenletet, könnyen átlátjuk, hogy abban kettőnél több momentum alig foglaltatik, az első t. i. az ív' hosszának szánt kezdetpont, második pedig, az érintők' irányát tekintve, a' kezdetirány. Az (1) egyenlet' alakja tehát más lesz, először a' kezdetpont', másodszor a' kezdetirány', 's végtére a' legátalánosb mód szerint a' kezdetpont' és kezdetirány' egyszerű megváltoztatása után.

3. §.

Vegyük tehát az idézettek szerint tárgyaltatásunk alá a' legátalánosb esetet 's annak következtében tegyük egyenletünkbe

$$\omega = \omega \pm \omega'$$
$$s = s \pm s',$$

vagy az alsó jegyet nem tekintve

$$\omega = \omega + \omega'$$
$$s = s + s', \quad (2)$$

e' mellett meghatározatlanúl hagyván, vajjon az ω' és s' állítólag vagy tagadólag veendő-e. Ezen egyenletek nem egyebet jelelnek ki, mint hogy a' kezdetirány' és kezdetpont' helye, melly miatt (1) egyenlet létezik, sajátlag az állító vagy tagadó ω' és s' mennyiségekkel megváltoztattak. Az (1) egyenlet ω és s helyett ez új értékeket téve, következőre megy át:

$$A\omega^2 + 2B\omega s + Cs^2 + 2(A\omega' + Bs' + D)\omega + 2(B\omega' + Cs' + E)s + A\omega'^2 + 2B\omega' s' + Cs'^2 + 2D\omega' + 2Es' + F = o \quad (3)$$

tehát az eredetivel ugyanazon fokú egyenletbe; mi egyszersmind a' (2) egyenlet' megengedhetőségének elemezési (*analyticai*) bebizonyítása.

4. §.

Az (1) egyenletnek minden lehetséges alakjai az ω' és s' eddig önkéntes mennyiségeknek valódi meghatárzata által már (3) egyenletből származtathatók. Csak megjegyezzük, hogy ezen mennyiségeknek egyedűl azon tagok' összhatóira (*coefficientes*), melylyek az ω és s változókra nézve első fokúak, valamint az ω és s-tőli szabad tagra van befolyásuk. Következőleg (1) egyenletből csak ezen tagok irthatandók ki. A' (3) és (1) egyenletben ω^2, ωs és s^2-nek összhatói ugyanazok, 's innen következtetjük, hogy az (1) egyenlet' azon alakjaiból, mellyekben e' tagoknak néhánya előfordúl, ezek sem a' kezdetpont' áthelyeztetése, sem a' kezdetirány' változtatása által ki nem irtathatnak. Igy tehát, minekutána e' második fokú három tagnak nehánya (1) egyenletben nem foglaltatik, különféle görbék az egyenlet által határoztatnak meg.

5. §.

Miután tehát mind a' három összható A, B, C véges értékü, vagy, majd egy, majd másik, 's végtére mind a' három $=$ o, (1) egyenletünk következő, egymástól eredetileg különböző alakokra megy át:

$$A\omega^2 + 2B\omega s + Cs^2 + 2D\omega + 2Es + F = o \quad (a)$$
$$A\omega^2 + 2B\omega s + 2D\omega + 2Es + F = o \quad (b)$$
$$2B\omega s + Cs^2 + 2D\omega + 2Es + F = o \quad (c)$$
$$A\omega^2 + Cs^2 + 2D\omega + 2Es + F = o \quad (d)$$
$$A\omega^2 + 2D\omega + 2Es + F = o \quad (e)$$
$$Cs^2 + 2D\omega + 2Es + F = o \quad (f)$$
$$2B\omega s + 2D\omega + 2Es + F = o \quad (g)$$
$$2D\omega + 2Es + F = o \quad (h)$$

Az (1) egyenlet' felbontása, (*a*) — (*h*)-ig terjedő egyenletek' vizsgálatára vezet. Az első hét egyenlet második fokú. Csupán az utolsó vonali, 's miként közvetlen kitűnik, kört terjeszt előnkbe. Ez utolsó tehát sajátlag a' másod rendű görbék' sorába nem is tartoznék, azokhoz mindazáltal annyiban csatolható, miként egyenlete különös állandók' felvétele által az átalános egyenletből ered. És igy a' fenforgó 8 egyenletet kell közelebbről vizsgálnunk, hogy lássuk, vajjon mindegyikben hány görbe foglaltathatik.

6. §.

A' (*h*) alatti egyenlet ez:

$$2D\omega + 2Es + F = o$$

Legyen $\omega = o$, lesz $s = -\frac{F}{2E}$ és ha $s = o$, lesz $\omega = -\frac{F.}{2D}$ Tegyük s helyett az egyenletbe ezen értéket: $s' - \frac{F}{2E}$: akkor az következőre olvad:

$$D\omega + Es = o \quad (I)$$

Minthogy ezen átalakítás, míg a' D, E, F összhatók valódiak, mindig és pedig csak ugyanazon egy módon eszközölhető ki, minden (h) egyenletei tehát csupán egyetlenegy görbét mutatnak elő, 's az a' kör.

Tegyük (g) egyenletbe ω és s helyett: $\omega + \omega'$ és $s + s'$-t (hol most természetileg ω és s más változókat jelentenek), 's ezen alakra menend át:

$$2B\omega s + 2(D + Bs')\omega + 2(E + B\omega')s + 2B\omega's' + 2D\omega' + 2Es' + F = 0$$

's ha

$$s' = -\frac{D}{B};\ \omega' = -\frac{E}{B}$$

lesz (*g*) egyenletből

$$\frac{2B\omega s + BF - 2ED}{B} = o$$

Minthogy ezen átalakítás B, D és E értékek miatt mindig megengedhető, 's csupán egyetlenegy egyenletet terjeszt előnkbe: méltólag következtetjük, hogy a' (*g*) egyenletben a' görbék' csupán egy neme foglaltatik A' B, D, E és F különös értékei csupán azok' minemüségét és helyezetét határozzák meg. Az egyenlet legegyszerűbben következőleg állítható elő:

$$\omega s = a \quad (II)$$

Az (*f*) egyenletbe ω és *s* helyett ugyanazt téve, lesz:

$$Cs^2 + 2D\omega + 2(Cs^2 + E)s + Cs'^2 + 2D\omega' + 2Es' + F = o$$

A' legegyszerűbb alakban csupán azon görbék' egyenletét nyerhetjük meg, melly az eddig ω' és s' önkéntes értékei által úgy határoztatható meg, hogy az új egyenletben okvetlenűl csak az *s* második és ω első hatványa forduljon elő. Ez oknál fogva szabad lesz

$$Cs' + E = o \text{ és } Cs' + 2D\omega' + 2Es' + F = o$$

tenni. Innen

$$s' = -\frac{E}{C},\ \text{és } \omega' = \frac{E^2 - FC}{DC}$$

7. §.

Mivel ezen értékek, valódi összhatók gyanánt (f) egyenletbe mindig tétethetnek, tehát ezen egyenletnek következő alak adható:

$$s^2 = a\omega \quad \text{(III)},$$

miből könnyen láthatjuk, hogy az (f) alatti egyenlet a' görbék' egy új nemét terjeszti előnkbe. Minthogy pedig az (e) egyenlet változók' felcserélése után (f) alatti egyenletre megy át: világos, hogy a' többször ismételt átalakítási móddal (e) egyenlet következő egyszerű alakra vihető:

$$\omega^2 = as \quad \text{(IV)}$$

következőleg (e) egyenlet csupán egy görbét foglal magában.

A' (d) alatti egyenlet ω és s helyébe: $\omega - \frac{D}{A}$ és $s - \frac{s}{A}$ -t téve, ezen alakra vihető:

$$A\omega^2 + Cs^2 + F' = o$$

's mivel tiszta állandói vagy tagadói tagokból álló öszszeg $= o$ nem lehet, a' három összható' jegyei tehát változtathatók. Ez összhatók' jegyei és állandó tagnak különbsége után (d) alatti egyenlet következendő három alakra megy át:

$$a\omega^2 + bs^2 + c = o \quad \text{(V)}$$
$$a\omega - bs^2 - c = o \quad \text{(VI)}$$
$$a\omega - bs^2 + c = o \quad \text{(VII)}$$

mellyek három különös görbét mutatnak elő, mit is a' felettöki szorgosabb vizsgálat az alantiakban be fog bizonyítni.

A' (c) egyenletből ugyanazon munkálatok szerint következő egyszerűbb egyenlet hozható ki:

$$2B\omega s + Cs^2 + F = o.$$

Szembetűnő azonban a' B jegyének változtathatása, mi szerint, ha ezen egyenletnek

$$2B\omega s + Cs^2 + F^2 = o$$

bizonyos két érték, ω és s' által elégség eszközöltethetik ki, úgy az

$$-2B\omega s + Cs^2 + F^2 = o$$

egyenletnek is következő értékek: $-\omega'$ és s' vagy $+\omega'$ és $-s'$ elégséget tehetnek.

Mind a' két görbe azonos (*identica*) 's csupán helyezetöknél fogva különböznek egymástól. Mi pedig C és F'-nek jegyét illeti, azokra nézve két különböző eset jöhet elő, mi szerint azok vagy egyenlő, vagy pedig különféle jegyekkel birhatnak. Hogy ezáltal két különböző görbe (c) egyenlet' közbenjárultával feltételeztetik, azonnal világos, ha az egyszeresített egyenletet egyik változója, például s szerint feloldjuk, 's lesz:

$$s = -\frac{B\omega}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{B^2\omega^2 - F'C}.$$

Az ív' vagy görbe' valódisága a' négyszögi gyökér' jegyének valódiságától, vagy $B^2\omega^2 - F'C$-nek állító értékétől függ. Itt azonban 1) F' és C egyenlő, vagy 2) különféle jegygyel birhatnak, 's e' szerint az első esetben ω egy minimumhoz lesz kapcsolva, a' másodikban pedig o-tól kezdve bármilly értéket vehet fel. 'S innen két különböző görbe ered, mellyek' egyenletei:

$$as^2 + 2b\omega s + c = o \quad (VIII)$$
$$as^2 + 2b\omega s - c = o \quad (IX)$$

Ugyanez áll a' (*b*) alatti egyenletre nézve is, 's igy ennek tárgyaltatásával elmaradhatunk. A' (*b*) egyenletnek is tehát két különböző görbéje van, 's egyenleteik ezek:

$$a\omega^2 + 2b\omega s + c = o \quad (X)$$
$$a\omega^2 + 2b\omega s - c = o \quad (XI)$$

Az (*a*) alatti egyenletbe végtére ω és s helyett ezen értékeket

$$\omega + \frac{BE - CD}{AC - B^2}; \quad s + \frac{DB - AE}{AC - B^2}$$

téve, lesz legegyszerűbb alakja:

$$A\omega^2 + 2B\omega s + Cs^2 + F' = o$$

's innen ω-át keresve, lesz:

$$\omega = -\frac{Bs}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{s^2(B^2 - AC) - AF'}$$

A' gyökérjegy alatti kifejezésnek valódisága a' $B^2 - AC$, és AF' mennyiségek' mineműségétől függ. Legyen

$$B^2 - AC < o$$

akkor C jegyének A jegyével egyfélének kell lenni, mert ellenkező esetben az következnék, hogy a' két állító tagnak összege kisebb o-nál, 's igy tehát tagadó. Ha pedig A és F'-nek 's igy tehát F' és C-nek egyféle jegyök van, bármilly érték tétetik is s helyett, ω mindig képzeleti marad; akkor tehát fen kitett egyenletünkben valódi görbék hiányzanak. Ellenben ha A és F′ ellenkező jegyekkel birnak, akkor görbének létezhetése, valamint ω és s meghatárzott véges határok közti helyezete okvetlenűl világos.

8. §.

Legyen továbbá

$$B^2 - AC > o$$

Ezen felvételnek megfelelünk, ha A és C ellenkező jegyekkel birnak. Ha továbbá A és F′ jegyei ellenkezők, szembetünő, hogy az *s* minden lehetséges értékeinek az ω valódi értékei felelnek meg 's ω és *s* együtt végtelen lesz. Ha pedig A és F′ jegyei egyenlők, észrevehető, hogy *s*-nek két legkisebb értéke leend, mellyeket áthágni lehetetlen a' *nélkül*, hogy ω képzeleti ne legyen. Végtére, ha a' $B^2 - AC > o$ feltételnél A és C jegye egyféle, valamint A és F′ jegyei vagy egyenlők vagy ellenkezők: újra két különböző görbe vonal' egyenletei jövendenek szinre. Következőleg (*a*) egyenletünk imez 5 egyenletre megy át:

$$a\omega^2 + 2b\omega s + cs^2 - \vartheta = o \quad \text{(XII)}$$

$b^2 - ac < o$ feltételnek megfelelőleg;

$$a\omega^2 + 2b\omega s - cs^2 - \vartheta = o \quad \text{(XIII)}$$

$$a\omega^2 + 2b\omega s - cs^2 + \vartheta = o \quad \text{(XIV)}$$

$$a\omega^2 + 2b\omega s + cs^2 + \vartheta = o \quad \text{(XV)}$$

$$a\omega^2 + 2b\omega s + cs^2 - \vartheta = o \quad \text{(XVI)}$$

E' négy utolsó egyenlet feltételézi, hogy a' második felezett összhatónak négyszöge, levonva belőle az első és harmadik összhatónak szorzatát (*factum*), nagyobb semminél.

Nincs egyéb hátra, mint azon esetnek vizsgálata, melly szerint az (a) egyenletben azon tagok, mellyekben s és ω első hatványúak, ki nem irtathatnak. Ez megtörténik, ha azon három összható közt létezhető egyenlet

$$B^2 - AC = o$$

kieszközöltetik. Ennek következtében egy az említett összhatók közül az állandó taggal együtt kiirtathatik. Tegyük tehát e' czél' elérése miatt:

$$A\omega^2 + 2B\omega' s' + Cs^{2\prime} + 2D\omega' + 2Es' + F = o$$

és
$$A\omega' + Bs' + D = o$$

lesz:

$$s' = \frac{D - AF}{2(AE - BD)} \quad \text{és}\ \omega' = \frac{B(D^2 + AF) - 2ADE}{2(AE - BD)}$$

's az (a) alatti egyenlet következőre megy át:

$$A\omega^2 + 2B\omega s + Cs^2 + \frac{2(AE - BD)\,s}{A} = o$$

tehát illy alakú egyenletre:

$$(a\omega + bs)^2 + 2\delta s = o \quad \text{(XVII)}$$

Ha az eredeti egyenletből, s-nek első hatványát és az állandó' tagját elmozditjuk, akkor illy alakú egyenletre

$$(a\omega + bs)^2 + 2e\omega = o$$

jutottunk volna. Kérdés, vajjon e' két egyenlet különböző görbéket képez-e vagy sem? Mivel azonban ez utolsó egyenlet mindenkor a' kezdetpont és a' kezdetirány' megváltoztatásának közbenjárultával a' (XVII) egyenlethez hasonló egyenleti alakra hozatható, tehát a' második esetnek okvetlenül helyet engedünk.

Végtére azon eset, mellyben az (a) alatti egyenlet' végezetűl elővett átalakításai meg nem állhatnak, fontoltassék meg. Mi is történend, ha s' és ω'-nak számlálója $=$ o, következőleg ha AE $=$ BD. Akkor mindazáltal ezen egyenlet:

$$A\omega^2 + 2B\omega s + Cs^2 + 2D\omega + 2Es + F = o$$

következő szorzatra alakítható át:

$$\left(A\omega + Bs + D + \sqrt{D^2 - AF}\right)\left(A\omega + Bs + D - \sqrt{D^2 - AF}\right) = o$$

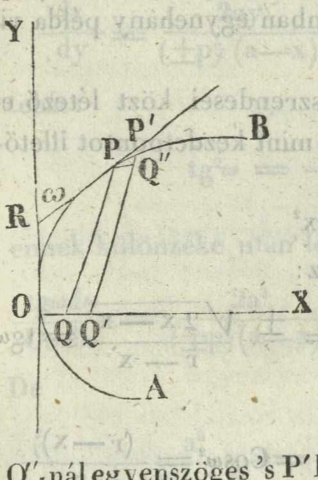
melly (1) egyenlet' alakjához hasonló két egyenlet' rendszerét képezi, következőleg új görbének nincs helye.

Igy tehát második fokú egyenletünkben 17 különböző görbét leltünk fel.

9. §.

Most azon képletek' (*formula*) kifejtéséhez megyünk át, mellyeknek eszközűl vételével egy, az x és y egyenszögi öszrendesek közt álló görbének egyenlete, bizonyos, ω és s közt álló egyenletre, és megfordítva, alakítható át.

Legyen AB bizonyos görbének íve, O kezdetpontja, OY kezdetiránya. Ezek után OY-ra OX-et függőleg (*perpendiculariter*) húzva, lesznek OY és OX AB görbének egyenszöges öszrendesei. Levén ezen görbének bizonyos P pontja, és PR érintője: lesz



$\sphericalangle$ PRY $= \omega$. A' görbe' P pontját az ív ds = PP' különzékig túlhaladva, a' különzéki hánylás' elvei szerint PP' ív, minthogy végtelen kicsiny, P pontnak érintőjével összeolvadottnak tekinthető. Húzzuk tovább PQ-t és P'Q'-t Ox-re, valamint PQ''-t P'Q'-ra szabdaszerüleg (*normal*), lesz PQ'' = QQ' = dx és P' Q'' = dy; $\triangle$ PP'Q'', Q'-nál egyenszöges 's P'PQ'' szög $= 90° - \omega$, következőleg:

$$dx = ds.\,\text{Cos}(90^\circ - \omega) = ds\,\sin\omega.$$
$$dy = ds.\,\sin(90^\circ - \omega) = ds\,\text{Cos}\,\omega.$$
$$\frac{dx}{dy} = tg\omega.$$

10 §.

A) Ha tehát bizonyos görbének egyenszöges öszrendesei közt létező egyenlete adva vagyon, kerestessék abból külzeléki hányas: $\frac{dx}{dy}$'s ezen adott egyenlet' közbenjárultával x, y által, vagy megfordítva, fejeztessék ki. Ezen mód szerint nyert kifejezést $= tg\omega$ téve, 's újra külzelékét keresve, megkapjuk dy vagy dx-t, $d\omega$ vagy ω-al kifejezettet. Továbbá ezen ω függvényét a' fen kitett dx és dy értékek' helyébe téve, szinre jövend az s és ω közötti görbének különzéki egyenlete, mellyből egészítés által az s és ω közötti egyenlet megkapható. Ezen munkálatot azonban egynehány példa világosabbá teendi.

A' körnek egyenszöges öszrendesei közt létező egyenlete, annak egy pontját, mint kezdetpontot illetőleg, ismeretes:

$$y^2 = 2rx - x^2$$

különzéki szabályok szerint lesz:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{r-x} = \pm\frac{\sqrt{2x - x^2}}{r - x} = tg\omega$$

tehát:

$$tg\omega^2 = \frac{2rx - x^2}{(r-x)^2} \cdot \frac{1}{1+tg^2\omega} = \text{Cos}\omega^2 = \frac{(r-x)^2}{r}$$

's innen:

$$\mathrm{Cos}\omega = \pm \frac{r - x}{r};$$

ennek külzelékét újra keresve, lesz:

$$r \sin \omega ds = \pm dx,$$

dx helyébe a' fentebbi kitételt téve, lesz:

$$r \sin \omega\, d\omega = \pm \sin \omega\, ds; \quad r d\omega = \pm ds;$$

ezt egészítve, lesz:

$$r\omega = \pm s.$$

Az apoloniai gömbszelvény' egyenszöges öszrendeseire nézve ez:

$$x^2 - 2ax \pm \frac{2a}{p} \cdot y^2 = o$$

a a' görbe' fél tengelyét, *p* pedig nyújtóját (*parameter*) jelentve. Ezen egyenletből ered:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{(\pm p)(a-x)} = \pm \frac{\sqrt{2a(\pm p)(2ax - x^2)}}{(\pm p)(a - x)};$$

tehát:

$$\mathrm{tg}^2\omega = \frac{2a(2ax - x^2)}{(\pm p)(a - x)^2};$$

ennek különzéke után lesz:

$$\frac{\mathrm{tg}\omega d\omega}{\mathrm{Cos}^2\omega} = \frac{2a^3}{(\pm p)(a-x)^3} \cdot dx = \frac{2a^3 \sin \omega\, ds}{(\pm p)(a - x)^3}.$$

De

$$\frac{a^3}{(a - x)^3} = \frac{(\pm p)(\mathrm{tg}^2\omega + 2a)^{3/2}}{(2a)^{3/2}};$$

tehát

$$ds = \frac{p(2a)^{3/2} d\omega}{2Cos\omega^3((\pm p)tg^2\omega + 2a)^{3/2}} = \frac{p(a)^{3/2} d\omega}{\sqrt{2}(2a\pm p+)(2a\mp p)Cos\omega)^{3/2}}$$

's ez a' keresett apoloniai gömbszelvénynek különzéki egyenlete s és ω közt. Egészitése, miként tudva van, a' csúcsköri függvényekre vezet, 's csupán ha $a = \infty$, azaz, ha hajtalék (*parabola*) véges alakban előállítható. Lesz t. i. ez esetben

$$ds = \int \frac{pd\omega}{2Cos^3\omega} = \frac{psin\omega}{4Cos^2\omega} + \frac{p}{2} \text{ lognat } tg^3 (45^\circ + \frac{\omega)}{2}.$$

A' közönséges körzet' egyenlete, egyenszöges öszrendesei közt, miként tudva van, ez:

$$x + \sqrt{2cy - y^2} = \text{carc}\left(\sin = \frac{\sqrt{2cy - y^2}}{c}\right)$$

hol *c* a' termesztő körnek körjegyzőjét jelenti. Innen

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2cy - y^2}} = \text{tg}\omega$$

és ebből foly:

$$\text{Cos}^2\omega = \frac{1}{1 + \text{tg}^2\omega} = \frac{2c - y}{2c};$$

különzékítés után pedig lesz:

$$4\ \text{Cos}\omega \sin\omega\, ds = dy = ds\, \text{Cos}\omega \text{ tehát}$$

$$4\,c \sin\omega\, d\omega = ds$$

's ezt egészítve lesz:

$$s = \text{Const} - 4\,c\,\text{Cos}\omega\ .$$

Az állandó azon feltételnél fogva határozandó meg, melly szerint ω és s egyszerre elenyésznek. Minek következésében lesz:

$$\text{Const} = 4c.$$

's ezek szerint a' közönséges körzet' egyenlete lesz:

$$s = 4c\,(1 - \text{Cos}\omega) = 8c \sin^{2\,\frac{1}{2}}\omega\ .$$

11. §.

B) Ha megfordítva akarunk bizonyos ω és s közti egyenletet egymásra x és y egyenszöges öszrendesei közöttire átalakítani: akkor előbb ω és s közti egyenlet külzeltessék, 's így a' ds sin ω vagy pedig ds Cosω értékek számoltassanak fel, 's ezeknek megtétele után = dy vagy = dx tétessenek. A' fenforgó különzéki egyent' egészítése után majdan y és ω vagy x és ω közti egyenletre jutandunk, mellyből a' $tg\omega$ értékét lelhetjük fel, 's azt $= \frac{dx}{dy}$ téve, a' megnyert különzéki egyenletet újonnan egészítjük. Azonban önkényünktől függ $tg\omega$ helyett más ω függvényét is felvehetni, például:

$$\sin\omega = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \text{ vagy } \cos\omega = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Továbbá azt is megtehetnők, hogy mind az x és y, mind pedig y és ω közti egyenletet föllelve, azokból ω kiirtathassék.

Például szolgálhatnak következők:

1) Legyen ω és s közötti feladott egyenlet:

$$s = 4c(1 - \cos\omega)$$

egy egyenszöges öszrendesek közötti egyenletre átalakítandó. A' fenforgó egyenlet' különzéke után, lesz:

$$ds = 4c \sin\omega\, d\omega, \text{ 's innen}$$

$$\cos\omega\, ds = 4c \sin\omega \cos\omega\, d\omega$$

tehát:

$$dy = 4c \sin\omega \cos\omega\, d\omega \text{ 's igy}$$

$$y = 2c \sin^2\omega = 2c.\frac{tg^2\omega}{1 + tg^2\omega} = 2c.\frac{dx}{dx^2 + dy^2}$$

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{2cy - y^2}}, \text{ 's innen}$$

$$x + \sqrt{2cy - y^2} = c \text{ Arc} \sin\left(= \frac{\sqrt{2cy - y^2}}{c}\right)$$

2) Legyen továbbá a' feladott egyenlet

$$\mathrm{Cotg}\,\omega = \frac{s}{h},$$

megnyerhető ebből

$$\frac{d\omega}{\sin^2\omega} = -\frac{ds}{h}, \text{ 's innen}$$

$$\frac{d\omega}{\sin\omega} = -\frac{\sin\omega\, ds}{h} = -dx;$$

egészítés után magától keletkezik:

$$\mathrm{lognat}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\omega = -\frac{x}{h}, \text{ innen}$$

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\omega = e^{-\frac{x}{h}};\ \mathrm{tg}\,\omega = \frac{2\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\omega}{1-\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\omega}$$

$$\mathrm{tg}\,\omega = \frac{2e^{\frac{-x}{h}}}{1-e^{\frac{-2x}{h}}} = \frac{dx}{dy}, \text{ tehát}$$

$$dy = \tfrac{1}{2}\left[e^{\frac{x}{h}} - e^{\frac{-x}{h}}\right] dx, \text{ és ebből a' keresett}$$

függvény lesz:

$$y = \frac{h}{2}\left[e^{\frac{x}{h}} - e^{\frac{-x}{h}}\right]$$

's ez a' lánczvonal' egyenszögi elég ismeretes egyenlete

3) Legyen

$$s\,\mathrm{log}a = \sec\omega + \mathrm{logtg}\,\tfrac{1}{2}\omega$$

következőleg

$$ds\,\mathrm{log}a = \frac{d\omega}{\sin\omega\,\mathrm{Cos}^2\omega},\ ds\sin\omega\,\mathrm{log}a = \frac{d\omega}{\mathrm{Cos}^2\omega}$$

azaz:

$$dx \log a = d.\ tg\omega;\ \text{következőleg}$$

$$x \log a = tg\omega = \frac{dx}{dy}\ \text{vagy}$$

$$dy \log a = \frac{dx}{x};\ y \log a = \log x.$$

$$x = e^{y \log a} = (e^{\log a})^y = a^y$$

A' feladott egyenlet tehát szeriszámos (*logarithmicai*) vonalnak előállítója.

II.

Az első és másod rendű görbék' főbb tulajdonságainak vizsgálata.

12. §.

Már fenn említők, hogy az ω és s közötti első fokú egyenlet a' körnek előállítója. Ezen vítatás' helyességéről meggyőződünk, ha azt veszszük figyelembe, hogy az említett egyenletben az s minden növekedésének egyenes viszonyban az ω növekedése felel meg, mi is a' körnek bélyeges tulajdona. Kérdés támadhat azonban, mit értünk első fokú egyenlet alatt, ha abban az ω- vagy s-el összekapcsolt tag hiányzanék. A' válasz, hogy az első esetben az egyenes vonal, a' másodikban pedig a' meghatározott mennyiségű egyenszög egyenlet által jeleltetett ki. Jelenleg ezen görbe'

$$\omega s = a \quad (II)$$

$$(1)\ \omega = \frac{a}{s},\quad (2) s = \frac{a}{\omega}$$

vizsgálatára megyünk át.

I.) A' görbe' haladása átalában. Mivel az s minden értékének csupán az ω egy értéke felel meg 's megfordítva, a' vonal egyszerű leend. Az s minden valós (*realis*), állító vagy tagadó értékéhez az ω lehetséges vagy előállítható értéke kivántatik; azért a' görbének két ágazatja van, azaz, állító és tagadó. Mivel pedig s egyenlő és ellenkező értékei ω egyenlő és ellenkező értékeit szülik, következik, hogy a' két görbe' ágazata azonos (*identica*). Ha $s = o$, $\omega = \infty$ lesz. A' vonal tehát végtelen számu gombolyításaival a' kezdetpontot hasztalanúl törekszik elérni. Ha $\omega = o$, $s = \infty$ lesz. E' szerint a' végtelen haladásnál fogva a' görbe végtelenűl a' kezdetirányhoz közelg.

II.) Nevezetes pontok. Mivel a' kezdetpontnál a' görbe' iránya és egyszersmind haladása is változik: világos, hogy azon esetben a' pont nem nevezetes, valamint akkor sem, ha a' forgás és haladás a' görbe' egyik pontjánál sem változik.

III.) Görbesztési erő és a' görbesztési viszony. A' görbesztési erő' kifejezése a' különzéki hányas: $\frac{d\omega}{ds}$, 's ezt R-nek nevezve, lesz görbénkre nézve:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = -\frac{a}{s^2} = -\frac{\omega^2}{a};$$

ha $s = \infty$, lesz $R = o$'s megfordítva.
Ha $s = o$, $R = \infty$ má válik, azaz: a' görbesztési erő' maximuma a' haladás' végtelenében van, valamint minimuma a' kezdetpontban lappang. Ha R' az s', ω' pontnáli görbesztési erő, lesz a' görbesztési viszony:

$$R : R' = -\frac{a}{s^2} : -\frac{a}{s'^2} = s'^2 : s^2 = \omega^2 : \omega'^2.$$

A' görbesztési erő tehát megfordított viszonyban áll az iv' hoszsza' négyszögével 's egyenirányban a' forgatási szög' négyszögével.

Egyenes görbék hasonlók, ha egyik önkéntes pontnáli görbesztési erő úgy aránylik, mint amaz a' másiknak megfelelő ponton. Megfelelő (hasonló helyezetű) pontok pedig azok, mellyeken az egyátalános forgási nagyságok kezdetponttól számítva egyenlők. A' hasonló helyezetű pontok' meghatározására nézve következők jegyzendők meg:

1) Ha a' görbesztési viszonyok ω és ω' függvények közbevételével az egyiknél, és ω 's ω'-al a' másik görbénél adva vannak, megkülönböztetendő: vajjon az egyátalános forgási egység mind a' két görbénél ugyanaz-e vagy sem. Az első esetben $\omega = \omega$ és $\omega' = \omega'$, 's akkor ω és ω' helyett ezek' egyenlő értékét ω és ω'-t a' görbesztési arányba téve, szem előtt tartsuk: vajjon ennek ezen munkálatok után meg legyen-e felelve vagy sem. De ha az első és második görbe' forgási egységei ugy viszonylanak egymáshoz, mint 1 : f-hez, akkor mind a' két görbének két megfelelő pontra nézve lesz ω és $\omega = f\omega$; valamint az ω és ω'-át tekintve $= f\omega'$. Ezen értékeknek ω és ω' helyébei tétele után a' görbesztési arány vizsgáltatik meg.

2) Ha a' görbesztési viszony s és s' függvények által az egyiknél, a' második görbénél pedig s és s' adva vagyon: akkor a' görbe pontjainak forgási nagyságai a' görbe' egyenletéből kerestetnek, 's e' szerint ω és ω',

ω és ω' értékei megkaphatók. Ha tehát $\omega = \omega$ és $\omega' = \omega'$ vagy $\omega = f\omega$ és $\omega' = f\omega'$-al teszszük, 's ezeknek megfelelő egyenleteit alakítjuk: megleljük a' második görbe' s és s' pontjait, az első s és s' pontjaival kifejezve. Ezek szerint s és s' mennyiségek a' görbesztési arányból megnyerhetők, 's helyességök könnyen megvizsgálható.

Ezekből foly, hogy: minden görbék, mellyek az ezen alakú $s\omega = a$ egyenlet által kifejeztethetők, hasonlók, és a' görbesztési viszonyok az állandó mennyiségektől egészen függetlenek.

13. §.

Jelenleg a' harmadik görbét vizsgáljuk meg, mellynek egyenlete:

$$s^2 = a\omega \quad \text{(III)}$$

I.) Haladása átalában. Ha $s = o$, ω is $= o$ lesz. A' görbének tehát a' kezdetpontnál kezdetiránya is van. Ha a állító, akkor az ω egyegy állító értékének s két egyenlő és ellenkező' értéke felel meg; ha pedig $\omega = \infty$, s is ∞ -vé válik. A' görbének tehát két végtelen csigádadon csavart és azonos ágazatja van. A' forgás mindkettőnél állító. Ha a tagadó lett vala, akkor ω is nemleges volna. A' görbe ugyanaz marad; csupán helyezete más.

II.) Nevezetes pontok. Minthogy a' kezdetponton a' haladás változik, 's a' forgás mindig ugyanaz marad, lesz az úgynevezett forgási pont. 'S mivel a' görbe' további folyamatjában, sem a' mi a' haladást, sem pedig a' mi a' forgást illeti, változás nem történik: következik, hogy a' görbének több nevezetes pontjai nincsenek.

III.) A' görbesztési erő- és viszony ez:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = \frac{2s}{a}$$

Ha $s = o$, lesz R is $= o$. A' görbe tehát a' kezdetponton minimum. Ha $s = \infty$, lesz $R = \infty$ valamint ω is. A' görbe tehát vég nélkül két oldalról törekszik a' legnagyobb·görbesztés' pontjai felé. Továbbá áll:

$$R : R' = s : s' = \sqrt{\omega} : \sqrt{\omega'}$$

A' két pontoni görbesztési erők úgy aránylanak, mint az ív' hossza, vagy mint a' forgási szögek' négyszöges gyökérjegyei. Minden illy nemű görbék egymás közt hasonlók. Ennek megmutatására legyen s és s' két pont az egyiknél, és s és s' a' másik görbénél megfelelő pontok, lesz

$$s : s' = \sqrt{\omega} : \sqrt{\omega'} \text{ és } S : s' = \sqrt{\omega} : \sqrt{\omega'}$$

's mivel $\omega = f\omega$ és $\omega' = f\omega'$, lesz

$$s : s' = \sqrt{\omega} : \sqrt{\omega'} = \sqrt{f\omega} : \sqrt{f\omega'} = \sqrt{\omega} : \sqrt{\omega'} = s : s'$$

14. §.

A' negyedik görbének egyenlete következő:

$$\omega^2 = as \quad (IV)$$

$$(1)\ \omega = \pm \sqrt{as},\quad (2)\ s = \frac{\omega^2}{a}$$

I.) Haladása átalában. Mivel ω és s egyszerre $= o$ válnak, a' görbének kezdetponton kezdetiránya is van. Ha s állító, akkor ω két egyenlő, de ellenkező értéket kap; 's tagadó létére pedig ω értékeit képzeletiekké teszi. A' görbének tehát két ágazatja van, mindkettő a' kezdetponttól állító, de ellenkező forgásban szétfut, azonos és csigádadon csavart, mivel ha $s = \infty$, ω is $= \infty$ lesz.

II.) Nevezetes pontok. Mivel a' kezdetponton a' forgás' (és nem a' haladás is) bizonyos változásának helye vagyon, akkor annak csúcsot kell alakítania. Minden egyéb pontok a' közönséges görbék' pontjai.

III.) A' görbesztési erő és viszony ez:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = \frac{a}{2\omega}$$

Ezen kifejezés a' kezdetpontra nézve végtelen lesz, ha $\omega = \infty$ semmivel egyenlítend. Minél nagyobb ω, annál kisebb az R, a' görbesztés tehát a' kezdetponttól fogva mindig fogy. A' görbesztési erőre nézve áll:

$$R : R' = \omega' : \omega = \sqrt{s'} : \sqrt{s}.$$

A' két pont' görbesztései viszonylanak megfordítva mint a' forgások, vagyis megfordítva, mint az ív' hoszsza négyszöges gyökérjegyei. Továbbá minden illynemű görbék hasonlók, mert az R : R' viszony, állandó menynyiségektől független.

15. §.

Az ötödik görbének ez vala egyenlete:

$$a\omega^2 + bs^2 - c = o \quad (V)$$

Ha $\omega = o$, lesz $s = \pm \frac{\sqrt{c}}{b}$; 's ha $s = o$, akkor $\omega = \pm \frac{\sqrt{c}}{a}$. A' görbének tehát a' kezdetponton kezdetiránya nincsen. Szándékunk a' kezdetirányt úgy változtatni meg, hogy az a' kezdetponttal összeolvadjon. Ennek következtében tegyünk az (V) egyenletbe ω helyett: $\omega' + \sqrt{\frac{c}{a}}$, 's azonnal megnyerjük

$$a\omega'^2 + bs^2 + 2\sqrt{ac\omega} = o$$

$$(1)\ s = \pm\sqrt{\frac{-\omega'(a\omega' + 2\sqrt{ac})}{b}};\ (2)\ \omega = -\sqrt{\frac{a}{c}} \pm \sqrt{\frac{c}{a} - bs^2}$$

I.) A' görbe' haladása átalában. Nevezetes pontok. Tegyük az (1) egyenletbe $\omega' = o$, lesz akkor s is $= o$, — a' kezdetpont tehát a' kezdetiránynyal összegurúl. Az ω' állító értékei az s értékeit képzeletiekké teszik; de ω-nak bizonyos tagadó értéket adva, s két egyenlő, habár ellenkező értéket nyerend, miáltal két ágazat jeleltetik ki. Mivel a' kezdetponttól nem a' forgás, csupán a' haladás lehet ellenkező: ez nem egyéb lesz görbesarknál vagy a' forgáspont. Az ω-nak adható legnagyobb érték az (1) egyenlet szerint e' viszony által: $a\omega' + 2\sqrt{ac} = o$ határoztatik meg 's ez után $\omega = -2\sqrt{\frac{a}{c}}$ leend. Az ω értékei tehát o és $-2\sqrt{\frac{c}{a}}$ határok közöt léteznek. A' (2) egyenlet szerint s legnagyobb értéket kap, ha $s = \pm\sqrt{\frac{c}{b}}$; 's akkor $\omega = -\sqrt{\frac{c}{a}}$, az $s = o$ minimumnak ezen ω értékei felelnek meg:

$$\omega \left[\begin{array}{l} = c \\ = -2\sqrt{\frac{c}{a}} \end{array} \right]$$

Mi az állító ágazatot $s = +\frac{\sqrt{-\omega'(a\omega' + 2\sqrt{ac})}}{b}$ illeti, ez nő o-tól $\sqrt{\frac{c}{b}}$-ig; ha ω' o-tol egészen $-\sqrt{\frac{c}{a}}$-ig halad. De ha ω, $-\sqrt{\frac{c}{a}}$-tól $-2\sqrt{\frac{c}{a}}$ ig halad, az s értékei $\sqrt{\frac{c}{b}}$-től o-ig ismét fogynak. Az állítólag haladó ágazatnak tehát az $s = \sqrt{\frac{c}{b}}$ pontjában csúcsa vagyon. Minthogy pedig ω' tagadó értékei, mellyek egyátalában $> 2\sqrt{\frac{c}{a}}$, s értékeit képzeletiekké teszik: a' görbe $\omega' = -2\sqrt{\frac{c}{a}}$ pontnál töredezettnek látszik lenni. Ez azonban helytelen, mert ha ω többé nem növekedhetik is, fogyhat mindazáltal, 's igy a' forgás az előbbieknek egy ellenkezője lesz, t. i. állító, 's ez marad is meddig az első tagadó 's egészen meg nem semmítetik, és azután is újonnan az ellenkezőre leend változtatandó. Vítatván, hogy a' forgás állító, ez a' fentebbi állítással nem ellenkezik, melly szerint csupán tagadó forgásnak engedtetik hely. A' forgási szögek a' kezdetirányra nézve tagadók, csupán az $\omega = -2\sqrt{\frac{c}{a}}$ pontra nézve ellenkezők, tehát állítók. Mivel az $\omega = -2\sqrt{\frac{c}{a}}$ pontban a' forgás változik, de nem a' haladás, ez forgási pont lesz. A' görbe' további vizsgálata után újonnan bizonyos csúcsra és még egy forgási pontra akadunk stb. A' fensorozottak az ágazatra nézve is állanak, mellynek haladása tagadó.

II.) A' görbesztési erő és viszony A' (2) egyenletből foly:

$$\frac{d\omega}{ds} = \pm \frac{bs}{\sqrt{a}\sqrt{c - bs^2}} = R.$$

Világos, hogy a' legkisebb görbesztésnek helye leend, ha $s = o$, mert akkor R is $= o$ lesz. Azon pontok, mellyeknél $s = o$, fentebb forgási pontoknak neveztettek. Azon pontok pedig, mellyeknél a' görbesztés végtelen nagygyá válik, következő viszony által $s = \pm \frac{\sqrt{c}}{b}$ határoztatnak meg, 's a' görbe' csúcsaitól nem különbözők. A' görbének s és s' pontoknáli görbesztési viszonya ez:

$$R : R' = \frac{s}{\sqrt{c - bs^2}} : \frac{s'}{\sqrt{c - b^2 s'^2}}$$

A' két görbe' hasonlatosságát tárgyazó kérdésnek eldöntésére következő egyenlet szolgálhat például:

$$\omega = -\frac{\sqrt{c}}{a} \pm \frac{\sqrt{c - bs}}{a}, \quad o = -\frac{\sqrt{c}}{a} \pm \frac{\sqrt{c - bs^2}}{a}.$$

A' forgás tehát s pontra nézve:

$$\omega = -\frac{\sqrt{c}}{a} \pm \frac{\sqrt{c - bs^2}}{a}$$

$$s' \qquad \omega' = -\frac{\sqrt{c}}{a} \pm \frac{\sqrt{c - bs'^2}}{a}$$

$$S \qquad w = -\frac{\sqrt{c}}{a} \pm \frac{\sqrt{c - bS^2}}{a}$$

$$S' \qquad w = -\frac{\sqrt{c}}{a} \pm \frac{\sqrt{c - bS'^2}}{a}$$

Ha egyegy görbe' forgási egysége úgy aránylik, mint 1 : f-hez, akkor lesz $\omega = f\omega$, és $\omega = f\acute{\omega}$; következőleg a' feltételi egyenletek ezek:

$$-f\sqrt{\frac{c}{a}} \pm f\frac{\sqrt{c - bs^2}}{a} = -\sqrt{\frac{c}{a}} \pm \frac{\sqrt{c - bS^2}}{a}$$

$$-f\sqrt{\frac{c}{a}} \pm f\frac{\sqrt{c - bs'^2}}{a} = -\sqrt{\frac{c}{a}} \pm \frac{\sqrt{c - bS'^2}}{a}$$

Innen az S és S' értéke kitalálható, és a' görbesztési arányba

$$\frac{s}{\sqrt{c - bs^2}} : \frac{s}{\sqrt{c - bs'^2}} = \frac{S}{\sqrt{c - bS^2}} : \frac{S'}{\sqrt{c - bS'^2}}$$

tétethetik. Ezt végre hajtva, a' fentebbi feltételi egyenletből tapasztalandjuk, hogy két illynemű görbe átalában egymáshoz nem hasonlít, kivéve azon esetet, ha $f = 1$, azaz, ha mind a' két görbe ugyanazon forgási egység szerint alakítatnék. Az ív' hosszának egysége mind a' két görbénél önkéntes lehet.

16. §.

A' hatodik görbének ez vala egyenlete:

$$a\omega^2 - bs^2 - c = o \quad \text{(VI)}$$

Minthogy ha $s = o$, $\omega = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ lesz, a' görbének kezdetponton kezdetiránya hiányzik. Tegyük ω helyett a' fentebbi egyenletbe $\omega' + \sqrt{\frac{c}{a}}$-t 's megnyerjük

$$a\omega'^2 - bs^2 + 2\sqrt{ac\omega'} = o$$

$$(1)\ s = \pm\frac{\sqrt{\omega'(a\omega' + 2\sqrt{ac})}}{b};(2)\ \omega = -\sqrt{\frac{c}{a}} \pm \frac{\sqrt{c + bs^2}}{a}$$

I.) A' görbe' haladása átalában. Nevezetes pontok. Ha $\omega = o$, s is $= o$ lesz; tehát a' kezdetpont a' kezdetiránynyal összegurúl. Az ω-nak egy-egy állító értéke s-re nézve két egyenlő és ellenkező értékeket szülend, 's egyszersmind s végtelenűl nő. A' görbének tehát két végtelen állító forgása, de ellenkező haladással ellátott ágazata van. A' kezdetpont tehát forgási pont leend. Azonban ω tagadó értékeket is nyerhet, de csupán ollyakat, mellyek' következtében ω' $(a\omega' + 2\sqrt{ac})$ állító, 's tehát mivel ω bizonyára tagadó, $a\omega' + 2\sqrt{ac}$ is tagadó leend: következőleg ω'-nak egyátalánosan véve $> 2\sqrt{\frac{c}{a}}$ kell lenni. Hahogy tehát a' tagadó forgás o-tól kezdődnék, a' haladás eleinte képzeleti, de mihelyt $\omega' = -2\sqrt{\frac{c}{a}}$, azonnal a' forgás minden egyegy nagyobb értéke helyett az s két egyenlő és ellenkező értékét kapjuk meg. A' görbe még két azonos ágazattal van ellátva, mellyek a' két előbbeniekhez hasonlók, mivel s-nek két egyenlő értékek felelnek meg, ha a' forgás állítólag x-el és tagadólag $-2\sqrt{\frac{c}{a}} - x$-el vitetett véghez. E' két ágazatra nézve a' kezdetpont forgási pont is egyszersmind. Mivel pedig ω növekedő értékeinek, s-nek ujonnan növekedő értékei felelnek meg: következik, hogy a' görbének több nevezetes pontjai nincsenek.

II.) A' görbesztési erő és viszony. — Ez

$$\frac{d\omega'}{ds} = R = \frac{bs}{(a\omega' + \sqrt{ac})} = \pm \frac{\sqrt{b\omega'(a\omega' + 2\sqrt{ac})}}{a\omega' + \sqrt{ac}}$$

$R = o$ lesz, ha $\omega' = o$, és ha $\omega' = -2\sqrt{\frac{c}{a}}$. Minden ágazatnak tehát a' forgási pontnál legkisebb görbesztése van. Ha $a\omega' + 2\sqrt{ac} = o$, 's következőleg ha $\omega' = -\sqrt{\frac{c}{a}}$, az R fölebbi kifejezése végtelenné válik. Úgy látszik, mintha a' görbe azon pontra nézve, mellyhez a' kitett ω' értéke tartozik, végtelen nagy görbesztésű volna. Ez azonban helytelen, mivel $\omega' = -\sqrt{\frac{c}{a}}$ értékére nézve az s valós értéke előállíthatlan. Ha ω' végtelen, lesz $R = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$; a' görbesztés tehát közelít állandó határaihoz. A' görbesztési viszony' és hasonlítás' meghatározására szolgálhat (VI) egyenletünk. Hol is

$R = \pm\frac{\sqrt{b(a\omega^2 - c)}}{a\omega}$, tehát a' görbesztési viszony:

$$R : R' = \frac{\sqrt{b(a\omega^2 - c)}}{a\omega} : \frac{\sqrt{b(a\omega'^2 - c)}}{a\omega'} = \frac{\sqrt{a\omega^2 - c}}{\omega} : \frac{\sqrt{a\omega'^2 - c}}{\omega'}$$

és az illy nemű két görbe' hasonlítására nézve ez a' feltételi egyenlet:

$$\frac{\sqrt{a\omega^2 - c} : \sqrt{a\omega'^2 - c}}{\omega \quad\quad \omega'} = \frac{\sqrt{a w^2 - c} : \sqrt{a w'^2 - c}}{w \quad\quad w'}$$

Ha mind a' két görbére nézve a' forgási egységek úgy viszonylanak, mint 1 : f-hez. Hahogy tehát $w = f\omega$ és $w' = f\omega'$, a' felebbi arány következőre megy át:

$$\frac{\sqrt{a\omega^2 - c}}{\omega} : \frac{\sqrt{a\omega'^2 - c}}{\omega'} = \frac{\sqrt{af^2\omega^2 - c}}{f\omega} : \frac{\sqrt{af^2\omega'^2 - c}}{f\omega'},$$

miből könnyen kimutatható, hogy f^2-nek = 1-nek kell lenni. Ebből következik, hogy illynemű különféle görbék' példányai csak akkor hasonlók egymáshoz, ha ugyanazon forgási egységre nézve önkéntes ívhosszaság' egysége szerint alakítattak.

17. §.

A' görbék' 7-ik neméhez tartozik az

$$a\omega^2 - bs^2 + c = o \quad (VII)$$

egyenlet. Téve $s = S' + \sqrt{\frac{c}{b}}$, egyenletünk azonnal más alakot veend magára 's lesz:

$$bs^2 - a\omega^2 + 2\sqrt{acs} = o$$

$$(1)\ s = \sqrt{\frac{c}{b}} \pm \sqrt{\frac{c + a\omega^2}{b}};\ (2)\ \omega = \pm \sqrt{\frac{s(bs + 2\sqrt{bc})}{a}}$$

I.) A' görbe' haladása átalában. Nevezetes pontok. A' (2) egyenlet szerint mind $s' = o$, mind $\omega = o$; a' görbe vonalnak tehát a' kezdetponton kezdetiránya is van. Mivel az s egyegy állító értékének azonnal nagy tagadó és állító forgások felelnek meg:

a' kezdetpontból tehát két azonos ágazat ered, mindkettő állító haladásu, az első mindazáltal tagadó, a' második pedig állító forgással ellátva. A' kezdetpont tehát csúcs gyanánt szolgál. Minthogy pedig s növekedéssel ω is növekedik, igy e' két ágazatnak több nevezetes pontjai nincsenek. Mindazáltal ω valós értékeket is nyerhet s'-nek tagadólagi állapotjánál fogva, de koránsem elébb, mint $s' = -2\sqrt{\frac{c}{b}}$ értékének áthágása után. Ha a' kezdetponttól tehát tagadólag távozunk, a' forgás lehetetlen, azaz, a' kezdetiránynyal is haladnunk kell. Ha egy tért, melly $= -2\sqrt{\frac{c}{b}}$, áthágtunk: lesz $\omega = o$, 's e' helytől fogva két azonos ágazat fejlődendik ki, 's mind-kettő tagadó haladású, de ellenkező forgású. E' pont $s' = -2\sqrt{\frac{c}{b}}$ tehát újonnan csúcs leend. Ha állítólag s'' kis mennyiséggel tovább haladunk 's tagadólag $-s'' - 2\sqrt{\frac{c}{b}}$-el: akkor mind a' két esetben ω nagy értéket nyerend, mi is a' (2) egyenletből előállítható; következőleg a' két utólsó ágazat azonos leend a' két első ágazattal. A' görbe tehát két pár elszakasztott ágazatból áll. A' csúcsainak távolsága $-2\sqrt{\frac{c}{b}}$.

II.) A' görbesztési erő és viszony. — Hasonlítás. A' görbesztési erő:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = \pm \frac{bs' + \sqrt{bc}}{a\sqrt{s'(bs' + 2\sqrt{bc})}}$$

R maximum lesz, ha $s' = o$, és akkor is, ha $s' = -2\sqrt{\frac{c}{b}}$; azaz, a' görbének mindkét csúcsainál végtelen nagyságú görbesztése vagyon. Habár R egyenletünk szerint semmivé válik, ha $s' = -\sqrt{\frac{c}{b}}$, ω mindazáltal e' pontra nézve képzeleti. Hogy az s' azon értékei kitaláltathassanak, mellyeknél fogva R minimummá válik: szükség az R külzeléki hányasát s' szerint elenyésztetni, azaz $= o$ tenni, 's látni, valljon ez egyenletből eredt s' értékei a' görbe' egyenletének elégséget nyujtanak-e vagy sem. Ezek szerint lesz:

$$\frac{dR}{dc'} = \mp \frac{bc}{a[s'(bs' + 2\sqrt{bc})]^{3/2}} = o$$

Innen $s' = \pm \infty$; ezen érték megengedhető 's erre nézve $R = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Hogy pedig a' két görbe' példányának hasonlítása meghatároztassék, térjünk a' $bs^2 - a\omega = c$ egyenletre vissza, 's a' következő feltételi egyenletet nyerjük meg:

$$\frac{a\omega^2 + c}{\omega^2} : \frac{a\omega'^2 + c}{\omega'^2} = \frac{af^2\omega^2 + c}{f^2\omega^2} : \frac{af^2\omega'^2 + c}{f^2\omega'^2},$$

mellynek átalában csupán $f^2 = 1$ felel meg. Világos tehát, hogy a' kérdéses görbék csupán akkor hasonlók egymáshoz, ha ugyanazon forgási egység szerint alakíttattak.

18. §.

Az átalános egyenlet' vizsgálatánál fogva a' görbék' nyolczadik neménck ez vala egyenlete:

$$as^2 + 2\,b\omega s + c = o \quad \text{(VIII)}$$

$$(1)\ s = -\frac{b\omega}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{b^2\omega^2 - ac}; \quad 2)\ \omega = -\frac{c+as^2}{2bs}$$

I.) A' görbe' haladása átalában. Nevezetes pontok. A' (2) egyenletből kitetszik, hogy az *s* minden állandó értékére nézve ω tagadó, 's megfordítva *s* tagadó létére ω állító leend. A' görbének tehát két ágazata vagyon, az első állító haladású és tagadó forgású, második pedig tagadó haladású 's állító forgású. Mind a' két ágazat azonos, mivel *s* egyenlő, de ellenkező értékeire nézve ω egyenlő egyátalános értékeket nyerend. Ha $s = o$, lesz $\omega = \infty$. A' görbe tehát végtelen számu forgásaival a' kezdetpont felé törekszik. Ha *s*, $\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ értéket egyszer elér, akkor ω, $+\sqrt{\frac{ac}{b}}$ minimumra jutott, 's az *s* további értékeinél fogva ismét növekedik 's végtére végtelenné is válik. Innen következik, hogy egyedül azon görbe' pontjai, mellyekre nézve $s = +\sqrt{\frac{c}{a}}$, 's $\omega = \mp\sqrt{\frac{ac}{b}}$, a' görbe' nevezetes pontjai, 's egyszersmind forgási pontok gyanánt szolgálnak.

II.) A' görbesztési erő és viszony. — Hasonlítás. A' görbesztési erőre nézve

$$R = \frac{d\omega}{ds} = -\frac{as + b\omega}{bs} = \frac{c - as^2}{2bs^2}$$

Ha $s = o$, R végtelen lesz. A' görbének tehát a' kezdetpontnál végtelen nagy görbesztése vagyon. $R = o$ lesz, ha $s = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$. A' görbe' görbesztése tehát a' forgási ponton $= o$. Ha $s = \infty$ lesz $R = -\frac{a}{2b}$.

A' görbe' s és s' két különböző pontnáli görbesztési viszonya ez:

$$R : R' = \frac{c - as^2}{2bs^2} : \frac{c - as'^2}{2bs^2} = \frac{c - as^2}{S^2} : \frac{c - as'^2}{S'^2}$$

A' két görbepéldány' hasonlítása' megkülönböztetésére következő arány szolgálhat:

$$\frac{c - as^2}{S^2} : \frac{c - as'^2}{S'^2} = \frac{c - aS^2}{S^2} : \frac{c - aS'^2}{S'^2}$$

hol s és S, valamint s' és S' a' két görbének megfelelő pontjait jelentik.

A' görbénk' két különböző példányának egyenlete ez:

$$\omega = -\frac{c + as^2}{2bs}$$

$$w = -\frac{c + as^2}{2bs}$$

Innen *s* pontra nézve a' forgás $\omega = -\dfrac{c + as^2}{2bs}$

s' " " $\omega' = -\dfrac{c + aS'^2}{2bs'}$

S " " $\mathfrak{w} = -\dfrac{c + aS^2}{2bs}$

S' " " $\mathfrak{w} = -\dfrac{c + as'^2}{2bS}$

Ha továbbá a' forgási egységnek egyátalános nagysága a' második görbére nézve f-szer nagyobb, mint az elsőre nézve, ω és $\mathfrak{w}$, valamint ω' és $\mathfrak{w}'$ hasonló helyezetűek leendenek, ha $\mathfrak{w}' = f\omega$ és $\mathfrak{w}' = f\omega'$. Innen következő feltételek keletkeznek:

$$(1) - \frac{fc + as^2}{2bs} = -\frac{c + aS^2}{2bs}$$

$$S = -\frac{f\,(c + as^2) \pm \sqrt{f^2(c + as^2)^2 - 4\,acs^2}}{2as}$$

$$(2) - \frac{f(c - as'^2)}{2bs'} = -\frac{c + aS'^2}{2bs'}$$

$$S' = -\frac{f\,(c + as'^2) + \sqrt{f^2\,(c + as'^2) - 4acs^2}}{2as'}$$

A' felebbi görbesztési aránynak mind a' két utolsó tagjába S és S' értékeit téve, akkor egy s és S' közötti egyenletre jutunk, melly azon feltételeket terjeszti előnkbe, mellyek szerint a' görbénk' egy pár példánya egymás közt hasonló leend.

A' kitalált S és S' értékeiből közvetetlenűl kitetszik, hogy ugyanazon egyenlet, mellynek a' hasonlítás' ismervényeit (*criteriumait*) előadnia kellene, igen zavart alakú, 's igy tehát világos, hogy a' görbének hasonlításáról csupán átalában lehetett szó.

19. §.

A' kilenczedik görbe' egyenlete ez:

$$as^2 + 2b\omega s - c = o \quad (IX)$$

$$(1)\, s = -\frac{b}{a}\,\omega \pm \frac{1}{a}\sqrt{b^2\omega^2 + ac}\;;\ (2)\ \omega = \frac{c - as^2}{2bs}$$

I.) A' görbe' haladása átalában. Nevezetes pontok. A' (2) egyenletből látjuk, hogy az s egyegy valós értékének csupán az s-nek egy valós értéke felel meg, 's hogy az s két egyenlő és ellenkező ω értékei is megkaphatók. A' görbének tehát két azonos ágazata van. Ha s = o, lesz $\omega = \pm \infty$. A' görbe tehát végtelen számú gombolyításainál fogva a' kezdetpont felé törekszik. Mig $\bar{s}$ állító s kisebb $+\sqrt{\frac{c}{a}}$ nál, ω állító lesz, ha $s = +\sqrt{\frac{c}{a}}$, $\omega = o$ lesz. Az s nagyobb értékeire nézve lesz tagadó 's mindig növekedik, mig s-el végtelenné nem válik. Kérdés, valljon azon pont, mellyre nézve $s = +\sqrt{\frac{c}{a}}$ a' görbe' nevezetes pontja-e, vagy sem. Hogy ez kitessék, a' görbe' kezdetpontját ezen pont után helyezzük 's igy tehát s $= s' + \sqrt{\frac{c}{a}}$-t a' második egyenletbe téve lesz:

$$\omega = - \frac{s'(as' + 2\sqrt{ac})}{2b\left(s' + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)}$$

Szembeszökő, hogy ha $s' = o$, ω is $= o$ válik, 's hogy ω tagadó értékű lesz, állító haladásra nézve, 's azokat végtelenűl megtartja; de ha s'-nek tagadó értékei vagynak, mellyek egyátalában kisebbek $\sqrt{\frac{c}{a}}$-nál, akkor ω állítóra válik. Az $s' = o$ vagy $s = + \sqrt{\frac{c}{a}}$ pontban, ha ugyan csak ebből indulunk, azonnal egyszersmind a' haladás és forgás is változik; következőleg e' pont nem nevezetes, 's csupán a' görbe' közönséges pontjának nevezhető. Mind az, mit a' görbe' egy ágazatáról fejtegettünk, többire is alkalmazható.

II.) A' görbesztési erő és viszony. — Hasonlítás. A' görbesztési erőre nézve áll:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = - \frac{as + b\omega}{bs} = - \frac{c + as^2}{2bs^2}$$

$R = \infty$ lesz, ha $s = o$, a' görbének tehát a' kezdetpontnál egy végtelen nagy görbesztése van. Ha $s = \infty$, $R = - \frac{a}{2b}$ lesz. A' görbe' két pontnáli s és s' görbesztési viszonyára nézve áll:

$$R : R' = - \frac{c + as^2}{2bs} : - \frac{c + as'^2}{2bs'^2} = \frac{c + as^2}{s^2} : \frac{c + as'^2}{s'^2}$$

Ezek szerint s és S′ által egy más illy nemű görbe' megfelelő pontjait kijelelve, lesz ezen két görbe vonalnak hasonlítását eldöntő aránya következő:

$$\frac{c+as^2}{s^2}:\frac{c+as'^2}{s'^2}=\frac{c+aS^2}{S^2}:\frac{c+aS'^2}{S'^2}$$

20. §.

A' görbe' 10-dik neméneк egyenlete ez:

$$a\omega^2+2b\omega s+c=o \quad (X)$$

$$(1)\,\omega=-\frac{bs}{a}\pm\frac{1}{a}\sqrt{b^2s^2-ac}; \quad (2)\,s=-\frac{c+a\omega^2}{2b\omega}$$

I.) A' görbe' haladása átalában. Nevezetes pontok. A' (2) egyenlet' alakjából közvetetlenűl tűnik ki, hogy *s* és *ω* ellenkező jegyekkel birnak, 's *ω* egyenlő értékeinek az *s* egyenlő értékei felelnek meg. Innen következtethető, hogy a' görbének két azonos ágazata van. A' (2) egyenletbe $\omega=o$ téve, lesz $s=\infty$; a' görbének tehát, mint végtelennek, kezdetiránya van; ha $\omega=\infty$, *s* újonnan végtelen leend. E' két érték között az *s* egy más értékének kell lenni, melly egyszersmind minimum, mi is az (1) egyenletből világlik, mellyből azonnal az $s=+\frac{1}{b}\sqrt{ac}$ értéke állítható elő. De hogy e' pontnak természetét meghatározhassuk, a' kezdetirányt úgy kell megváltoztatnunk, hogy a' $\sqrt{\frac{ac}{b}}$-re nézve $\omega=o$ legyen 's e' szerint

$$s = -\frac{a\left(a^1 - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 + c}{2b\left(\omega' - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)}$$

lesz. A' kérdéses pont tehát csúcs. Ennek tehát a' görbe kettejét birja, egyéb nevezetes pontokat azonban nem.

II.) A' görbesztési erő és viszony. — Hasonlítás. A' görbesztési viszonyra nézve áll:

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{2b\omega^2}{c - a\omega^2} = R.$$

Ez $=$ o lesz, ha $\omega =$ o, 's igy tehát ha $s = \infty$, azaz, ha a' haladás végtelen. Ha $\omega = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$, lesz R $= \infty$, a' görbének tehát csúcsánál végtelen nagy görbesztése van; ha $\omega = \infty$, $R = -\frac{2b}{a}$ lesz. A' görbe' két pontnáli s és s' görbesztési viszonya következő:

$$R : R' = \frac{2b\omega^2}{c - a\omega^2} : \frac{2b\omega'^2}{c - a\omega'^2} = \frac{\omega^2}{c - a\omega^2} : \frac{\omega'^2}{c - a\omega'^2}$$

'S ha S és S' egy más görbe' megfelelő pontjai, lesz a' görbesztési viszony:

$$\frac{\omega^2}{c - a\omega^2} : \frac{\omega'^2}{c - a\omega'^2} = \frac{\mathfrak{w}^2}{c - a\mathfrak{w}^2} : \frac{\mathfrak{w}'^2}{c - a\mathfrak{w}'^2}$$

Továbbá ha a' forgási egység a' második görbére nézve az első' f-szerese, következőleg $\omega = f\omega$ és $\mathfrak{w}' = f\omega'$, lesz

$$\frac{\omega^2}{c - a\omega^2} : \frac{\omega'^2}{c - a\omega'^2} = \frac{f^2\omega^2}{c - af^2\omega^2} : \frac{f^2\omega'^2}{c - af^2\omega'^2}$$

honnét $f^2 = 1$. Minden illy nemű görbék tehát ugyanazon forgási egységre nézve egymáshoz hasonlók.

21. §.

A' görbék' 11-dik nemének ez vala egyenlete:

$$a\omega^2 + 2b\omega s - c = o \quad \text{(XI)}$$

$$(1)\, \omega = -\frac{bs}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{b^2\omega^2 + ac}\,;\ (2)\ s = \frac{c - a\omega^2}{2b\omega}$$

I.) A' görbe' haladása átalában. Nevezetes pontok. A' (2) egyenletből kitetszik, hogy egyenlő és ellenkező értékekre nézve *s* is egyenlő és ellenkező értékeket nyerend, a' görbének tehát két azonos ágazata van. A' (2) egyenletbe $\omega = o$ téve, $s = \infty$ leend. A' görbének tehát végtelen távolságban kezdetiránya vagyon; $\omega = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$-ra nézve, $s = o$ lesz, 's ha $\omega = \infty$, *s* ismét végtelenné válik. A' görbe tehát végtelen számú gombolyításaival az utolsó pont felé törekszik. Azonban, hogy az $\omega = +\sqrt{\frac{c}{a}}$ pont' természete meghatároztathassék, tegyük ω helyett a' (2) egyenletbe $\omega' + \sqrt{\frac{c}{a}}$-t, lesz az következő alakú:

$$s = -\frac{\omega'\,(a\omega' + 2\sqrt{ac})}{2b\left(\omega' + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)}$$

ha $\omega' = o$, lesz $s = o$; az ω' állító értékeire nézve lesz s tagadó, valamint megfordítva az ω' tagadó 's egyátaljában $\sqrt{\frac{c}{a}}$-nál kisebb értékekre nézve állító leend. Az $\omega' = o$, vagy $\omega = +\sqrt{\frac{c}{a}}$-tól ellenkező irányban haladva a' forgás is ellenkező leend, 's így tehát e' pont a' görbe' közönséges pontja. Ez azon pontra is alkalmazható, a' mellyre nézve $\omega = -\sqrt{\frac{c}{a}}$.

II.) A' görbesztési erő és viszony. — Hasonlítás. A' görbesztési erőre nézve:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = -\frac{2b\omega^2}{c + a\omega^2}$$

A' görbesztés azonnal $= o$, mihelyest $\omega = o$ válik, következőleg azon pontban, a' mellyben a' görbének kezdetiránya vagyon. Az R kifejezése az ω egy valós értékére nézve sem lehet végtelen, 's e' szerint a' görbének végtelen görbesztése egy pontnál sincs. Az R kitételét ezen alakra hozván:

$$R = -\frac{2b}{\frac{c}{\omega^2} + a}$$

világos, hogy az ω növekedő értékeire nézve az R értéke is növekedik, 's ha $\omega = \pm\infty$, $R = -\frac{2b}{a}$

lesz. A' görbesztési erők tehát o és $-\frac{2b}{a}$ határok között léteznek. A' görbe két pontnáli s és s' vagy ω és ω' görbesztési viszonyára nézve a' felebbiek szerint áll:

$$R : R' = -\frac{2b\omega^2}{c+a\omega^2} : -\frac{2b\omega'^2}{c+a\omega'^2} = \frac{\omega^2}{c+a\omega^2} : \frac{\omega'^2}{c+a\omega'^2}$$

Továbbá ω és ω' más görbének két megfelelő pontnáli görbesztési egységét jelentve, 's ha ezek' forgási egysége az elsőhez úgy aránylik, mint f: 1-hez, következőleg $\omega = f\omega$ és $\omega' = f\omega'$ lévén: a' két görbe példánya' hasonlításának meghatározására szolgáland:

$$\frac{\omega^2}{c+a\omega^2} : \frac{\omega'^2}{c+a\omega'^2} = \frac{f^2\omega^2}{c+af^2\omega^2} : \frac{f^2\omega^2}{c+af^2\omega'^2} \quad \text{vagy}$$

$$c+a\omega^2 : c+a\omega'^2 = c+af^2\omega^2 : c+af^2\omega'^2$$

's innen újonnan $f^2 = 1$, úgy, hogy itt is két görbepéldány hasonló egymással, ha ugyanazon forgási egységre nézve alakíttattak.

22. §.

A' görbék' 12-dik neménak egyenlete:

$$a\omega + 2b\omega s + cs^2 - d = o \quad \text{(XII)}$$

$$(1)\ \omega = -\frac{b}{a}s \pm \frac{1}{a}\sqrt{s^2(b^2-ac)+ad};\quad 2)\ s = -\frac{b\omega}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2(b^2-ac+cd)};\quad (3)\ b^2-ac < o$$

I.) A' görbe' haladása átalában. Nevezetes pontok. Minthogy a' gyökérjegy alatti kitételek a' (3) egyenlet miatt minden esetre bizonyos különbséget képeznek elő: s és ω bizonyos mennyiségen túl nem nyomúlhatnak. Az ív az (1) egyenlet szerint: $\pm \sqrt{\frac{ad}{ac - b^2}}$-ra, a' forgási szög a' (2) egyenlet után $\pm \sqrt{\frac{cd}{ac - b^2}}$ határokra szorítvák. A' görbe' haladása, kipuhatolhatására szolgál az (1) egyenlet, elébb négyszöge, gyökérjegyének felső jegyét tekintve, következőleg

$$\omega = -\frac{b}{a}s + \frac{1}{a}\sqrt{s^2(b^2 - ac) + ad}$$

téve. Ha s = o, ω, $\frac{\sqrt{d}}{a}$ értéket nyerend, 's ha s tovább is állítólag növekedik, akkor ω is mindaddig állító marad, mig $s =< \sqrt{\frac{c}{d}}$; végtére ha $s = \sqrt{\frac{c}{d}}$, $\omega = o$ lesz, 's az s nagyobb értékeire nézve ω tagadó leend. Az $s = \sqrt{\frac{c}{d}}$ pont tehát: forgási pont. Az s legnagyobb állító értékére nézve $\omega = -b\sqrt{\frac{d}{a(ac - b^2)}}$ lesz. A' görbe mindazáltal e' pontnál nincs félbe szakadva, mert habár s nagyobb, ω csakugyan képzeleti; kisebb értékeinél fogva azonban, a' kezdetponttól számítva, újonnan állító lehet; csupán azon pontra nézve, melly szerint $s = \sqrt{\frac{ad}{ca - b^2}}$, a' haladások ellenkezők. Következőleg e' pont a' görbe' csúcsa. Ha a' görbe' haladását az (1) egyenletben s állító értékeire nézve a' gyökérmennyiségnek alsó jegye szerint vizsgálat alá veszszük, látszik, hogy ω az s minden értékeire nézve tagadó. Ezen görbe' részén tehát ω tagadó maximumát éri el, azaz, $\omega = -\sqrt{\frac{cd}{ac-b^2}}$ lesz, ha $s = + b \sqrt{\frac{d}{c(ac-b^2)}}$. Ezen pontot áthágva, a' forgási nagyság, a' kezdetponttól számítva, tagadó marad, de egyátalában véve kisebb, következőleg a' $b\sqrt{\frac{d}{c(ac-b^2)}}$ pontra nézve ellenkező forgásoknak hely engedtetik. E' pont tehát: forgási pont. Az (1) egyenletben ha s tagadó, ugyanazon ω értékei két sorzataira jutunk, melylyek csupán jegyeikre nézve különbözők.

II.) A' görbesztési erő és viszony. A' görbesztési erőre nézve áll:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = -\frac{b\omega + cs}{a\omega + bs}$$

Ezen kitételt sajátilag úgy kellene átalakítanunk, hogy vagy csupán s-t, vagy ω-t foglalna magában; de azért a' görbesztési maximum' vagy minimum' meghatározására igen alkalmatos. R minimummá válik, ha $b\omega + cs = o$, ezen viszonynak a' (2) egyenlet szerint akkor van megfelelve, ha ω legnagyobb értékü. A' görbének tehát forgási pontjánál görbesztése $= o$ vagyon. R maximum lesz, és pedig $= \infty$ ha $a\omega + bs = o$; azaz, az (1) egyenlet szerint az s legnagyobb értékeinél fogva. A' görbe' csúcsainál tehát görbesztése végtelen nagy.

23. §.

A' görbék' 13-dik nemének egyenlete:

$$a\omega^2 + 2b\omega s - cs^2 - d = o$$

$$(1)\ \omega = -\frac{bs}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{s^2(b^2+ac)+ad};$$

$$(2)\ s = \frac{b\omega}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2(b^2+ac)-ad}$$

I. A' görbe' haladása átalában. Nevezetes pontok. Az (1) egyenlet szerint az s minden lehetséges értékeire nézve ι valós értékeket nyerend; a' (2) egyenletet pedig tekintve, szembeszökő, hogy ω-nak $\sqrt{\frac{cd}{b^2+ac}}$ értéket áthágásával s képzeleti lesz. Következőleg $\omega = o$ sem lehet, azaz, a' görbének egy pontjánál sincs kezdetiránya. Az (1) egyenletben a' gyökérmennyiségnek alsó jegyét tekintve, az s állító értékeire nézve ω értékei tagadók lesznek, és s-sel együtt növekednek, mig végtelenekké nem válnak, mi a' csigádadon csavart ágazatot jelenti. Jelen görbének nevezetes pontjai nincsenek, minthogy a' forgás- vagy haladásnak bizonyos változása sehol sem fordúl elő. Ha már most az (1) egyenletben a' felső jegyet és s-et ismét állítót veszszük fel, ω csupa állító értékeket nyerend, mellyek egy bizonyos ponttól annyival növekednek, mennyivel s nőtt, 's ezzel egyszerre végtelennekké válnak. A' második ágazatnak tehát haladása és forgása állító, 's egyszersmind csigágadon csavart. Ezen ágazatnál a' forgás, ha $s = o$, tehát a' kezdetpontban lesz $\omega = + \sqrt{\frac{d}{a}}$; az $s = + b\sqrt{\frac{d}{c(b^2+ac)}}$ pontban a' forgás lesz $\omega = + \sqrt{\frac{cd}{b^2+ac}}$, 's valódi minimumát elérte. A' görbe' forgási szöge tehát a' kezdetponttól a' fenforgó pontig mindig fogy, 's ezen túl újonnan növekedik, következőleg ez a forgási pont. Az s tagadó értékeire nézve a' görbe' két új ágazatját kapjuk meg, mellyek a' fölebbiekkel azonosak.

II.) A' görbesztési erő és viszony. Erre nézve áll:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = -\frac{b\omega - cs}{a\omega + bs},$$

's ez = o lesz, mihelyest $b\omega = c$, mi is a (2) egyenlet szerint a' forgási pontra vezet. Ha $a\omega + bs = o$ lehetne, a' görbesztés végtelen nagygyá válnék, mi azonban lehetetlen, minthogy ennek következtében az (1) egyenlet szerint $s^2(b^2 + ac) + ad = o$-nek kellene lenni, e' kifejezésnek azonban mindig állító értékei vannak. Ha s és ω végtelenekké válnak, a' görbesztési erőre nézve ezen érték áll:

$$R = \pm\frac{(\sqrt{b^2 + ac} \mp b)}{a}$$

A' görbe két pontnáli s és s' görbesztési viszonyra nézve lesz:

$$R : R' = \frac{b\omega - cs}{a\omega + bs} : \frac{b\omega' - cs'}{a\omega + bs'} =$$

$$= \frac{\sqrt{\omega^2(b^2 + ac) - cd}}{\sqrt{s^2(b^2 + ac) - cd}} : \frac{\sqrt{\omega^2(b^2 + ac) - cd}}{\sqrt{s'^2(b^2 + ac) + ad}} =$$

$$\frac{\sqrt{\omega^2(b^2 + ac) - cd}}{\sqrt{\omega^2(2b^2 + ac)(b^2 + ac) - b^2cd \pm 2b\omega\sqrt{\omega^2(b^2 + ac) - cd}}} :$$

$$\frac{\sqrt{\omega'^2(b^2 + ac - cd}}{\sqrt{\omega'^2(2b^2 + ac)(b^2 + ac) - b^2cd \pm \pm 2b\omega\sqrt{\omega'^2(b^2 + ac) - cd}}}$$

24. §.

A' görbék' 14-dik nemének ez vala egyenlete:

$$a\omega^2 + 2b\omega s - cs^2 + d = o \text{ (XIV.)}$$

$$(1)\ \omega = -\frac{b}{a}s \pm \frac{1}{a}\sqrt{s^2(b^2+ac)-ad};\quad (2)\ s = \frac{b\omega}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2(b^2+ac)+cd}$$

I.) A' görbe' haladása átalában. Nevezetes pontok. Az (1) egyenlet szerint ha $s = o$, ω értékei képzeletiek lesznek, s tehát o nem lehet, következőleg kezdetpontnak a görbe' egy pontja sem tekinthető, vagy inkább a görbe' egyenlete bizonyos pontra, melly kezdetpontúl szolgál, vitetik, habár az nem a görbe' pontja is. Ezen kezdetponttól bizonyos tért $= \pm \sqrt{\frac{ad}{b^2 + ac}}$ áthágva, ollyan pontokra jutunk, a mellyekre nézve ω valós értéket nyer, s különösen következőket: $\pm\ b \sqrt{\frac{d}{a\,(b^2 + ac)}}$. Ezen értékek határozzák meg egyszersmind azon irányt, melly szerint a kezdetponttól indulnunk kell, hogy a' görbe' legközelebbi pontjait érhessük el. E' két pontból két pár ágazat indúl ki; az első tagadó, a' második pontnáli pedig állító haladású, és azonosak. Vizsgálatunk' tárgyáúl azonban csupán azon két ágazat szolgál, mellyeknek ívei állítók. Hogy kezdetöknél fogva haladásul könnyebben tárgyaltathassék, ω és s helyett két új változó mennyiségeket ω' és s'-t veszünk fel, ugy hogy a' kezdetpont — és irány ugyanazon ponton legyenek, a' mellyre nézve az (1) egyenlet az s értékét illetőleg minimummá válik, mi is könnyen véghezvihető, ha

$$s' = s + \sqrt{\frac{ad}{b^2 + ac}} \quad \text{és} \quad \omega' = \omega - b\sqrt{\frac{d}{a\,(b^2 + ac)}}$$

az (1) egyenletbe tétetik, minek következtében az következőre megy át:

$$(3)\ \omega' = -\frac{bs'}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{s'^2(b^2+ac)+2s'\sqrt{ad(b^2+ac)}}$$

Szembeszökő, hogy az s egyegy állító értékének egy állító 's egy tagadó ω értéke felel meg. Az $s' = o$ pont tehát ezek szerint valódi csúcs. Minthogy a két ágazat' többi pontjaira nézve s' és ω' egyszersmind növekedik, azokon több nevezetes pontok nem léteznek, ω és s egyszersmind végtelenek lesznek, annak jeléül, hogy mind a' két ágazat csigádad csavart. Minthogy az s' ugyanazon értékeire nézve $\pm\ \omega'$ tagadó értékei egyátalában véve mindig nagyobbak az állandóknál, a görbesztés tehát a tagadólag gombolyított ágazatnál nagyobb, mint a' másiknál. Ugyan ez áll azon két ágazatról is, mellyek ezen pontból: $s = -\sqrt{\frac{ad}{b^2+ac}}$ indulnak ki.

II.) A' görbesztési erő és viszony. Hasonlítás. Az elsőre nézve áll:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = -\frac{b\omega - cs}{a\omega + bs}$$

E' kifejezés végtelen lesz, ha $a\omega + bs = o$, vagy ha ω és s helyett ω' és s' tétetik, az $a\omega' + bs' = o$ nézve, azaz:

$$s' = o \text{ és } s' = -2\sqrt{\frac{ad}{b^2+ac}}, \text{-ra nézve így}$$

tehát a csúcsnál. A' görbe két pontnáli s és s' görbesztési viszonyára nézve áll:

$$R : R' = \frac{b\omega - cs}{a\omega + bs} : \frac{b\omega' - cs'}{a\omega' + bs'}$$

és a' két görbe' példánya hasonlítási föltételeknek meghatározására nézve:

$$\frac{b\omega - cs}{a\omega + bs} : \frac{b\omega' - cs'}{a\omega' + bs'} = \frac{bW - cS}{aW + bS} : \frac{bW' - cS'}{aW' + bS'}$$

ezen arányból előbb s és s', S és S'; ω, ω' W és W' által kifejeztessék és ezek után $W = f\omega$ és $W' = f\omega$ tétessék.

25. §.

A' görbék' 15-dik nemének egyenlete ez:

$$a\omega^2 + 2b\omega s + cs^2 + d = o \text{ (XV.)}$$

$$(1)\ \omega = -\frac{b}{a}s \pm \frac{1}{a}\sqrt{s^2(b^2 - ac) - ad};$$

$$(2)\ s = -\frac{b}{c}\omega \pm \sqrt{\omega^2(b - ac) - cd}$$

's a' föltételi egyenlet:

$$(3)\quad b^2 - ac > o$$

I.) A' görbe' haladása átalában. Nevezetes pontok. Az (1) egyenlet szerint egyegy állító s értékének az ω két tagadó értékei felelnek meg és megfordítva Ha $s = o$'s ha $\omega = o$, s képzeleti marad, azaz, kezdetpontnak a' görbe' egy pontja sem nézhető; valamint kezdetiránynak a' görbe' akármelly pontoni iránya nem neveztethetik. Az ω-nak legkisebb értékei ezek: $\pm$

$\sqrt{\frac{cd}{b^2 - ac}}$, az s-nek pedig legkisebb értékei: $\pm \sqrt{\frac{ad}{b^2 - ac}}$. Az $s = + \sqrt{\frac{ad}{b^2 - ac}}$ pontból két ágazat megy ki, ezek' forgási mennyiségei a' kezdetirányra nézve mindig tagadók. Ezen első pontnál mind a' két ágazatnak közös iránya $= - b \sqrt{\frac{d}{a(b^2 - ac)}}$ vagyon. Az ω értékének egy sorzata s növekedéssel mindig nő, de a' második, mellynek az (1) egyenletbeni felső jegy felel meg, mindig fogy, míg minimummá nem válik $\omega = - \sqrt{\frac{cd}{b^2 - ac}}$, 's innen újonnan tagadólag növekedik. Ezek' következtében azon pont, a' mellyre nézve s minimum, c s ú c s, valamint az, a' mellyre nézve ω minimummá válik, f o r g á s i p o n t. A' görbének tehát k é t c s ú c s a 's k é t f o r g á s i p o n t j a vagyon. Továbbá minthogy ω és s végtelenné válik, a' görbének tehát csupa végtelen, csigádadon csavart ágazatai vannak.

II.) A' g ö r b e s z t é s i e r ő. Erre nézve áll:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = \frac{b\omega + cs}{a\omega + bs}$$

A' görbesztés maximum 's egyszersmind végtelenné válik, ha $a\omega + bs = o$ lesz, azaz, az (1) egyenlet szerint ha s a' minimum, következőleg a' csúcson. A' görbesztés ellenben $= o$, ha $b\omega + cs = o$, azaz, az (1) egyenlet szerint ha ω a' minimum, következőleg a' forgási ponton. Ha ω és s végtelen nagyok, a' görbesztési erők e' határokhoz közelednek:

$$\frac{\pm b - \sqrt{b^2 - ac}}{\pm a}$$

26. §.

A' görbék' 16-dik nemének egyenlete:

$$a\omega^2 + 2b\omega s + cs^2 - d = o \quad \text{(XVI.)}$$

$$(1) \; \omega = -\frac{b}{a}s \pm \frac{1}{a}\sqrt{s^2(b^2 - ac) + ad};$$

$$(2) \; s = -\frac{b}{c}\omega \pm \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2(b^2 - ac) + cd}$$

e' föltételi egyenlettel:

$$(3) \; b^2 - ac > o.$$

I.) A' görbe' haladása átalában. Nevezetes pontok. Ha $s = o$, $\omega = \pm\sqrt{\frac{d}{c}}$ lesz, és ha $\omega = o$, lesz $s = \pm\sqrt{\frac{d}{a}}$. A' görbének tehát kezdetpontnál kezdetiránya nincsen. Hogy a' görbe' azon része, a' mellyre nézve a' kezdetpontoni forgás: $\omega = +\sqrt{\frac{d}{a}}$ megvizsgáltathassék, tegyük ω helyett az (1) egyenletbe $\omega' + \sqrt{\frac{d}{a}}$, 's megnyerjük:

$$(4)\ \omega' = -\frac{\sqrt{ad}+bs}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{s^2(b^2-ac)+ad}$$

Innen világlik, ha $s=o$, ω' is $=o$ lesz. Ha s állító értékű, ω mindig tagadó marad, annak jeléül, hogy a' kezdetpont: csúcs. Az s növekedő értékeire nézve ω is nő, 's ha s végtelen, ω is azzá válik. A' görbének tehát két csigádad ágazatja vagyon. Az (1) egyenletbe ω helyett $\omega' - \sqrt{\frac{d}{a}}$ tételével a' kezdetponttól még két más, de a' fölebbiekkel hasonló ágazatra jutottunk volna tagadó haladással, jóllehet állító forgással elláttottakra.

II.) A' görbesztési erő. Ez:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = -\frac{b\omega + cs}{a\omega + bs}$$

Ezen kifejezésben sem a' számláló, sem a' nevező különböző nem lehet, mi is az (1) és (2) egyenletekből világos. A' görbének tehát sem ollyan pontjai, a' mellyekre nézve a' görbesztés $=o$ legyen, sem pedig a' mellyeknél fogva az végtelenné válhatnék, nincsenek.

27. §.

A' görbék' 17-dik neméhez tartozott egyenlet:

$$(a\omega + bs)^2 - 2ads = o \quad (XVII.)$$

$$(1)\ \omega = -\frac{bs}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{2ads}$$

I.) A' görbe' haladása átalában. Nevezetes pontok. Ha $s = o$, lesz ω is $= o$; a' görbének tehát a kezdetponton kezdetiránya vagyon. Továbbá az (1) szerint s csupán állító értékeket vesz fel, 's azok' mindegyikének ω kettős értéke felel meg. A' görbének tehát két ágazatja vagyon, az első, a' mellyhez az egyenlet' alsó jegye tartozik, mindig tagadó forgású marad. A' második ágazatra nézve ω előbb állító; jeléül, hogy a' görbének kezdetpontnál csúcsa vagyon. Ha $s = \frac{ad}{4b^2}$ lőn, akkor ω ugyanazon ágazaton ismét $= o$ válik; a' görbének tehát ismét kezdetiránya vagyon. Az s nagyobb értékeire nézve ω tagadó leend, és az ágazat egész elforgásáig ugyanaz marad. Mivel továbbá a' második ágazaton ω állító értékei két $= o$ értékek között léteznek, a' görbének maximuma vagyon. Azon ponttól, a' mellyben ennek helye van, a' forgás fogy, jeléül, hogy, ez a' forgási pont. Ugyanott az ív' hossza $s = \frac{ad}{4b^2}$. A' forgási pont tehát úgy van helyezve ezen pontok között, a' mellyekben a' görbe' iránya egyszersmind a' kezdetirány is, hogy az, az elsőtől 's a' másodiktól háromszor távolabb, mint a' csúcstól. Ha $s = \infty$, lesz ω is $= \infty$, következőleg a' görbe' mindkét ágazatja csigádad.

II.) A' görbesztési erő. Ez:

$$\frac{d\omega}{ds} = R = -\frac{b}{a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{ad}{s}}.$$

Ezen kifejezés, ha $s = o$, végtelenné válik; a' görbének tehát csúcsában végtelen nagy görbesztése vagyon. Továbbá $s = o$, ha $s = \frac{ad}{4b^2}$. A' görbének tehát a' forgási pontban görbesztése $= o$. A' végtelenben a' görbesztés $= - \frac{b}{a}$ leend.

AZ ELSŐ

S

MÁSOD RENDŰ GÖRBÉK

[illegible]

ÖSZRENDEZETEK KIVITELE,

ÉS FŐBB TULAJDONSÁGAIK.

[illegible]

TEST VILMOS,

M. A. [illegible]

MÁSODRANGÚ PÁLYAMUNKA.

BUDÁN,

A MAGYAR KIR. EGYETEM BETŰIVEL.

M DCCC [illegible]

Ezen kifejezés [illegible] végtelenné válik, a gör-
bének tehát [illegible] vagy [illegible] vagyon.
Továbbá [illegible]. A' görbének tehát [illegible]
[illegible] A végtelenben a gör-
[illegible] lesz.

AZ ELSŐ
ÉS
MÁSOD RENDŰ GÖRBÉK,

AZOKNAK

ÖSZRENDESEKRE ÁTVITELE,

ÉS FŐBB TULAJDONSÁGAIK.

IRTA

FEST VILMOS,

M. K. ÉPITŐKORMÁNYI ALTISZT.

MÁSODRANGU PÁLYAMUNKA.

BUDÁN,

A' MAGYAR KIR. EGYETEM' BETŰIVEL.

M.DCCC.XLIV.

Concordia parvae res crescunt, discordia maximae dilabuntur.

Mielőtt a' t. m. túdós társaság által feladott kérdés' fejtésébe bocsátkoznám, az első és másod rendü görbéket, az öszrendesek rendszerére nézve, veszem vizsgálat alá, hogy az új, vagy is eredeti módszer (mellynél leginkább Péters't követtem) 's az öszrendesek' rendszere közt létező különbség annál inkább szembe tünjék. A' segéd eszközök' hiánya, 's korlátozott időm miatt, a' feladott kérdés teljes kimerítését nem birtam ugyan eszközleni: mindazonáltal, egyfelől meglevén győződve, hogy értekezésem nem lesz egészen érdek nélküli, másfelől pedig megfontolva, miként más jobb munka elől a' jutalmat ugy sem nyerendi el, eltökélém magam', azt pályázásra bocsátani.

Martius 23. 1840.

I. SZAKASZ.

Első és másod rendü egyenletek.

I. FEJEZET.

A' pont' helyzetének meghatározása. A' pont' és egyenes vonalnak egyenlete, 's annak taglalása (Discussion).

§. 1.

Ha valamelly pontot M (1. kép) egy bizonyos téren úgy akarunk meghatározni, hogy az más ponttal el ne cseréltethessék, szükség lesz azt két egymást vagó egyenes vonallal AX, és AY (1. kép) viszonyba hozni, mellyek' helyzete ismeretesnek vétetik. (1. kép) (1. kép)

Hogy ha t. i. a' két távolság

BM ⧺ AC és
CM ⧺ AB *

tudatik, akkor az M pont' helyzete tökéletesen van meghatározva.

* ⧺ egyenlő és közegyenes.

AB metszéknek, *AC rendesnek*, a' kettő együtt *öszrendeseknek*, XX' *a' metszékek' tengelyének*, YY' pedig a' *rendesek' tengelyének* neveztetnek. A' vágott pont *A* az öszrendesek' *kezdő pontja*; a' szög < YAX az öszrendesek' szöge. Az előjövendő leszármazásoknál legalkalmasb a' fertály szöggel élés (Rechter Winkel), melly fölvétel mindenütt meg is tartatott, hol az ellenkező említve nincs.

§. 2.

(2. kép) Mivel a' metszék AB = x (2. kép) és a' rendes AC = y, változó mennyiségek, lesz ha bizonyos M pontra nézve AB = a, és AC = b adatik:

$$x = a \text{ és}$$
$$y = b$$

M pontnak két egyenlete.

Ha AB változatlan marad, AC mindig fogy, míg végtére = o-vá válik, akkor

$$x = a$$
$$y = o$$

olly pont' egyenletei, *melly a' metszékek' tengelyébe esik.*

Épen úgy e' két egyenlet:

$$x = o$$
$$y = b,$$

egy a' rendesek' tengelyébe eső pontnak egyenletei. Végre:

$$x = o$$
$$y = o$$

a' kezdő pontnak egyenletei.

§. 3.

Hogy minden lehető pontok' helyzetei a' négy fertályban I, II, III, IV (2. kép) x és y által határoztathassanak, szükséges lesz még az öszrendeseknek belüvetési jegyeket adni (algebraische Vorzeichen). Ha t. i. A ponttól X felé *igenleges* (positiv) *metszékek*, A-tól Y felé pedig *igenleges rendesek* olvastatnak, lesznek az A ponttól X' felé számlált metszékek, és Y' felé olvasott rendesek, *nemlegesek* (negativ). (2. kép)

A' mondottak szerint tehát a' négy M, M' M'', M''' pontoknak egyenletei következők:

I M-re nézve $\left\{\begin{array}{l} x = + a \\ y = + b \end{array}\right\}$

II M'-re nézve $\left\{\begin{array}{l} x = - a \\ y = + b \end{array}\right\}$

III M''-re nézve $\left\{\begin{array}{l} x = - a \\ y = - b \end{array}\right\}$

IV M'''-re nézve $\left\{\begin{array}{l} x = + a \\ y = - b \end{array}\right\}$

§. 4.

Az egyenes vonalnak egyenlete.

(3. kép) Legyen M''' N (3. kép) egy tetszés szerinti *egyenes* (vonal t. i.), melly a' függőleges öszrendesek' tengelyeit C és B pontokban vágja; ezen egyenesben valamelly három felvett pontnak M, M', M'' öszrendesei legyenek AQ, AQ', AQ'', és MQ, $M'Q'$, $M''Q''$; legyen végtére

$BB' \parallel XX'$; az által lesz:

($\backsim$ hasonló) $\triangle BMB \backsim \triangle BM'P' \backsim \triangle BM''P''$,

és abból következik az arány:

$$\frac{MP}{BP} = \frac{M'P'}{BP'} = \frac{M''P''}{BP''} = \ldots\ldots$$

és ha ezen állandó arány $= a$, és

$AB = b$ tétetik, lesz:

$$MP = MQ - b = y - b$$
$$M'P' = M'Q' - b = y - b$$
$$M''P'' = M''Q'' - b = y - b$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

tehát $\frac{y-b}{BP} = \frac{y-b}{BP'} = \frac{y-b}{BP''} = \ldots\ldots = a$

és mivel $BP = AQ = x$
$BP' = AQ' = x$
$BP'' = AQ'' = x$

lesz: $\frac{y-b}{x} = a$,

mellyből következik:

$$(1)\ldots\ y=ax+b$$

vagyis az egyenes vonalnak egyenlete.

Ha ezen egyenletben (1), x helyett akármelly más érték = AQ tétetik, az annak megfelelő rendes MQ = y (3. kép) számítható, melly érték MQ a' függőleges vonalon tétethetik fel, mi által az adott egyenesnek pontja M van meghatározva; hasonlóan találtatnak a' vonalnak többi pontjai is. Ezen egyenletben x és y a' *változó*, *a* és *b* pedig az *állandó mennyiségek;* és ha $< NCX = < \alpha$, lesz (3. kép)

$$a = \frac{MP}{BP} = \text{tang.}\,\alpha,$$

feltéve hogy a' fél átmérő = 1; *b* pedig azon pontnak rendese, mellyben az adott egyenes a' rendesek' tengelyét éri.

§. 5.

Az (1) egyenletnek taglalása.

1. A' két állandó *a* és *b*, melly addig határozatlan marad, míg valamelly bizonyos egyenesről szó nincs, azt mutatja, hogy az egyenesnek meghatározásához két föltétel kivántatik.

2. Ha az adott egyenesnek azon pontjait akarjuk meghatározni, mellyek a' metszékek' és rendesek' tengelyét általvágják, akkor változ-

tatva tétessék y és x = o-vá, és az első esetben x, a' másodikban y értéke keletkezik; mert 2-dik §. szerint azon pont, mellynek rendese = o a' metszékek' tengelyében, mellynek pedig metszéke = o, a' rendesek' tengelyében fekszik. Lesz tehát, ha y = o:

(3. kép) $$x = -\frac{b}{a} = AC.\ (3.\ \text{kép})$$

C pontra nézve;
ha x = o:

$$y = + b = AB.$$

B pontra nézve.

3. Ha b = o, vagy B pont A pontra esik, az első egyenletnek (1), következő alakja lesz:

$$(2) \ldots .\ y = ax$$

melly egy, a' kezdő ponton keresztül menő egyenesnek egyenlete; mert ha x = o, lesz egyszersmind y = o, és megfordítva; t. i. az egyenes vonal az öszrendesek' tengelyét kezdőpontjában metszi. Ezen (2) egyenlet csak egy határozatlant foglal magában, jeléül, hogy az utóbb említett egyenesnek meghatározásához csak egy adatra van szükség.

4. Ha M''N, B pont körül Y felé forog, a' rendesek' tengelyével össze fog esni, midőn $\angle\ \alpha = 90^\circ$ lesz, 's mivel akkor:

$$a = \text{tang}\,\alpha = \text{tang}\,90° = \infty, \text{ lesz}$$

$$x = \frac{y - b}{a} = \frac{y - b}{\infty} = o.$$

A' rendesek' tengelyének egyenlete tehát:

$$x = o.$$

5. Ha $M'''N$ az említett mód szerint B' felé addig forog, mig $< \alpha = o$, vagy mig BB' vonallal esnék öszsze, lesz, mivel $a = \text{tang}\,\alpha = o$,

$$y = b$$

az az, *egy a' metszékek' tengelyével b távolságra párhuzamos* (parallel) *vonalnak egyenlete.*

6. Ha $M'''N$, C pont körül X felé forog, nem csak $< \alpha$, hanem b is kisebbül, és ha $M'''N$, AX-re esik, lesz:

$$< \alpha = o$$

$$\text{és} \quad b = o, \text{ 's azért}$$

$$y = o,$$

melly a' metszékek' tengelyének egyenlete.

7. Legyen $AC = c$, lesz a' (2-dik pont szerint)

$$c = -\frac{b}{a} \text{ és avval}$$

$$y = ax - ac$$

hol b helyett az érték $= -ac$ tétetett. Ha most $M'''N$, C körül addig forog, mig $< \alpha = 90°$, mivel $\text{tang}\,\alpha = a = \infty$, lesz:

$$x = \frac{y}{a} + c = \frac{y}{\infty} + c$$

vagy $x = c$,

egy á rendesek' tengelyével c távolságra párhuzamos vonalnak egyenlete.

∞

§. 6.

Az első rendü általjános egyenletnek alakja, úgy mint:

$$Ax + By + C = o,$$

melly egy egyenes vonal, mert abból kifejthető:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

$$\text{mellyben: } -\frac{A}{B} = a$$

$$\text{és } -\frac{C}{A} = b.$$

Ezen egyenes könnyen alakítható; kerestessenek t. i. annak pontjai B és C (5. kép) mellyekben az öszrendesek' tengelyei metszetnek; mivel az egyenesnek meghatározásához csak két pont kivántatik, szükség lesz ezen két talált pontot, egymással, egyenes vonal által összekötni, 's mindkét felől meghoszabbítani. Mi által az adott vonal alakítva van.

(5. kép)

Ha az adott egyenes a' kezdő ponton megy keresztül, az az:

$$y = Ax,$$

akkor x helyett egy bizonyos érték p. o. = 10 vétessék (4. kép) = AB) lesz, a' szerint

(4. kép)

$$y = 10\ A = BM$$

feltéve, hogy BM $\perp$ AX, 's a' kivánt két pont A és M meg van határozva. (a' jegy $\perp$ azt jelenti, hogy függőleges)

1-*ső példa.*

Legyen p. o. az adott egyenes:

$$2y - 4x = 16.$$

$$\text{ha } x = o, \text{ lesz } y = \frac{16}{2} = 8.$$

$$\text{ha } y = o, \ \text{,,} \ -x = \frac{16}{4} = 4.$$

Vétessék tehát:

$$- x = AC = 4, \text{ és}$$
$$y = AB = 8. \ (5. \text{ kép})$$

(5. kép)

akkor LN lesz az egyenletnek megfelelő egyenes vonal.

2-*dik példa.*

$y = 5x$ adva van;

tétessék: $x = 10 = AB$, lesz

$$y = 50 = BM$$

(4. kép) feltéve, hogy BM $\perp$ AX, mi által a' vonal meg van határozva. (4. kép)

2-dik FEJEZET.

Másod rendü görbék.

I. A' Kör (itt mindig a' kör' kerülete értetik).

§. 7.

A' kör' egyenletének felállításánál az öszrendesek' tengelyei úgy legyenek választva, hogy a' kezdő pont A, egyik átmérőnek végével, a' metszékek' tengelye pedig egyszersmind ezen átmérővel essék össze. AP = x és PM = y legyenek, egy, a' körben felvett pontnak ösz-
(6. kép) rendesei, (6. kép) C a' kör' közép pontja, 's a' fél átmérő CM = r. A' $\triangle$ből CMP következik:

$$CP^2 + PM^2 = CM^2, \text{ vagy, mivel}$$
$$CP = x - AC = x - r,$$
$$PM = y, \text{ és } CM = r$$
$$(x - r)^2 + y^2 = r^2, \text{ és abból}$$
$$(1)\ x^2 + y^2 - 2rx = o,$$

a' körnek egyenlete.

Ha a' rendesek' tengelye közegyenesen C pontig mozdíttatik, akkor még egyszerűbb alakot nyer az (1) egyenlet: mert most lesz: $CP = x$, $PM = y$, és $CM = r$, tehát:

$$\overline{CP}^2 + MP^2 = CM^2 \text{ vagyis}$$

$$(2)\ x^2 + y^2 = r^2.$$

§. 8.

A' (2) alatti egyenletnek taglalása.

1. Ha az egyenlet (2) y-ra nézve fejtetik-ki, lesz

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

A' kétszeres jegy a' gyökér előtt azt mutatja, hogy minden x értékeért, meddig y még lehető érték, y-nak két egyenlő, de ellenirányú értéke van; *hogy tehát a' metszék' tengelye a' kört két részarányos* (symmetrisch) *magát minden pontjában tökéletesen födő részre választja.*

2. x értéke valamint igenlegesnek, úgy nemlegesnek is tétethetik, de x^2 mindig igenleges marad; tehát egyenlő igenleges vagy nemleges metszékeknek, csak egyenlő rendesek felelnek meg; *azért a' görbe a' rendesek' tengelye által is két részarányos, tehát a' kör, a' középpontjában egymást egyenes szög alatt metsző tengelyek által, négy részarányos részre osztatik.*

3. Hogy a' körnek azon pontjai, mellyek a' két tengely által metszetnek, határoztathassanak, tegyük a' (2)dik egyenletben először

$$y = o \text{ 's lesz}$$
$$x^2 = r^2, \text{ tehát}$$
$$x = \pm r$$

az az, a' metszék' tengelye által a' kör $+ r$ *és* $- r$ *távolságokban vagyis A és B pontokban vágatik.*

Ha $x = o$, lesz:

$$y = \pm r,$$

tehát a' rendesek' tengelye is a' kört $+ r$ *és* $- r$ *távolságokban találja.*

4. Az egyenlet

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

azt is mutatja, hogy, ha $x = o$, y legnagyobb; ha x folyvást nevekedik, akkor y fogy, míg végtére $x = r$ értékére nézve

$$y = o\text{-vá válik.}$$

x értéke nem lehet nagyobb mint r, mert ha $x > r$, y értéke lehetetlen (imaginair); 's úgy y sem lehet nagyobb mint r, mert akkor x értéke volna lehetetlen.

II. *Csúcskör* (Ellipse).

§. 9.

A' Csúcskör olly tulajdonságú egyenlapu görbe, mellynek minden pontjából M,
(7. kép) M'... (7. kép) valamelly előre meghatárzott két ponthoz F, F' vett távolságok' öszvete FM + F'M, vagy FM' + F'M' 's a' t., egyenlő valamelly egyenessel $= 2a$; tehát:

$$FM + F'M = FM' + F'M' = 2a.$$

F és F' gyúpontnak (Brennpunkt), minden egyenes FM, F'M 'stb., melly a' görbének akármelly pontját, a' gyúponttal összeköti, vezetőnek neveztetik (Leitstrahl).

§. 10.

Ha F, F' pontokon keresztül egyenes vonal huzatik, 's FF', C-ben feleztetvén

$$CA = CA' = a \text{ tétetik}$$

A és A', az említett tulajdonságánál fogva, a' csúcskörnek két pontja leszen; mert *A*-ra nézve:

$$CF = CF' \text{ levén},$$

$$AF + AF' = a - CF + a + CF' = 2a;$$

A'-ra nézve:

$$A'F' + A'F = a - CF' + a + CF = 2a.$$

Ha F és F'ből, CA = CA' = a-val, mint fentővel (radius) magokat B és B'-ben metsző körívek (Kreisbögen) vonatnak, B és B' is a' görbének két pontja; mert BF + BF = B'F + B'F' = a + a = 2a. Ha végtére a' határzott egyenesben F F' egy pont μ vétetik és F, F ből, Aμ és A'μvel, magokat M, M' és m, m'ben vágó körívek huzatnak, akkor M, M' és m, m' is a' görbének pontjai lesznek. Mert p. o. M-re nézve áll:

$$FM + F'M = A\mu + A'\mu = AA' = 2a.$$

Ezen mód szerint több pont is meghatároztatik, mellyek, ha folytonos vonallal köttetnek össze, a' csúcskört képzik.

§. 11.

Ezen görbének egyenlete' leszármaztatására nézve legyen F F' a' metszékek' tengelye; C
(8. kép) pont az öszrendesek' kezdő pontja (8. kép) M a' görbének egy pontja, FM, F'M a' vezetők; akkor lesz, ha $FM = u$, $F'M = u'$ tétetik:

$$u + u' = 2a \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

ha továbbá $CP = x$, $PM = y$, M pontnak öszrendesei, a' két FMP, és F'MP △ből következő egyenlet ered:

$$PF^2 + PM^2 = FM^2 \quad \ldots\ldots (\beta)$$
$$PF'^2 + PM^2 = F'M^2 \quad \ldots\ldots (\vartheta)$$

's ha $CF = CF' = c$, lesz:

$$PF = c - x, \; PF' = c + x$$

és (β) 's (ϑ) szerínt:

$$(c - x)^2 + y^2 = u^2 \quad \ldots\ldots (\delta)$$
$$(c + x)^2 + y^2 = u'^2 \quad \ldots\ldots (\varepsilon)$$

összeadás által:

$$2c^2 + 2x^2 + 2y^2 = u^2 + u'^2$$

vagy $2(x^2 + y^2 + c^2) = u^2 + u'^2 \ldots (\tau)$

(δ) át (ε)ból lehúzván:

$$4cx = u'^2 - u^2 = (u' + u)(u' - u)$$

vagy $4cx = 2a\,(u' - u)$, és abból

$$u' - u = \frac{2cx}{a} \quad \ldots\ldots (\varphi)$$

(α) és (φ) egyenletekből:

$$u' = a + \frac{cx}{a}, \text{ és}$$

$$u = a - \frac{cx}{a},$$

ezen két érték (τ)-ba téve:

$$2(x^2+y^2+c^2) = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 + \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2$$

$$= 2a^2 + \frac{2c^2x^2}{a^2}$$

's abból:

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2, \text{ vagy}$$

$$x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2, \ \ldots\ldots \ (m)$$

Mivel $\triangle$ben két oldal együtt mindig hosszabb mint a' 3-dik magában, lesz

$$u + u' > FF', \text{ azaz:}$$

$$2a > 2c, \text{ vagy}$$

$$a^2 > c^2$$

$a^2 - c^2$ tehát mindig igenleges mennyiség; ha tehát:

$$a^2 - c^2 = b^2 \text{ tétetik}$$

lesz (m) szerint:

$\dfrac{x^2 b^2}{a^2} + y^2 = b^2$, *és abból végtére a' csúcskör-nek legegyszerűbb egyenlete:*

$$(A) \quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

§. 12.

(*A*) *egyenletnek taglalása.*

1. Ha az (A) egyenlet, egyszer y-ra, azután x-re nézve fejtetik ki, lesz:

$$(n)\quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(p)\quad x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

2. Minden, Cponton keresztül menő vonal N N′, Cpontban feleztetik; mert ha ezen egyenesnek N N′ egyenlete, melly (5 §) szerint:

$$y = Ax,$$

a' csúcskör' egyenletével köttetik össze, akkor' a' következő egyenlet csak azon pontokat foglalhatja magában, mellyek mind a' két vonallal, a' csúcskörrel t. i. 's az egyenessel, közösek; az által azon pontoknak öszrendesei nyeretnek meg, mellyek a' csúcskört vágják. Ha tehát az (A) egyenletben y helyett Ax iratik, lesz:

$$A^2 a^2 x^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

és abból:

$$(q) \ldots\ldots x = \frac{\pm ab}{\sqrt{A^2 a^2 + b^2}}$$

's mivel $y = Ax$, lesz

$$(r) \ldots y = \frac{\pm A ab}{\sqrt{A^2 a^2 + b^2}}$$

az által N és N' pontoknak öszrendesei x és y határoztattak, a' felső jegy (+) N-nek, az alsó (—) N'-nek felelvén meg. A' két egyenletből (q) és (r) látni, hogy valamint x-nek a' két értéke egyenlő, úgy y-né is; tehát Cp = Cp', és Np = N' p', azért a' két △NCp $\cong$ N'Cp', és $\cong$ congruent

NC = N'C.

vagy minden, C ponton keresztül vont egyenes, C-ben feleztetik; azért C középpontnak, 's minden azon keresztül menő egyenes p. o· *NN' átmérőnek neveztetik.*

3. A' gyökér előtti kettős jegy (n) és (p)-ben, azt mutatja, hogy *valamint a' kör, úgy a' csúcskör is, az öszrendesek tengelyei által, 4 részarányos (symmetrisch) részre osztatik.*

4. y = o, ád, x = ± a; x = o, ád
y = ± b;

t. i. az öszrendesek' tengelyei, + a és — a, + b, és — b távolságokban vágatnak.

5. M pontnak kép (8) távolsága Ctől, x és y által kifejezve: (8. kép)

$$CM = d = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

vagy ha (n)ből y helyett a értéke tétetik:

$$d = \pm \sqrt{x^2 + \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}} = \pm \sqrt{\frac{a^2x^2 - b^2x^2 + b^2}{a^2}}$$

$$\text{vagy } d = \pm \sqrt{b^2 + \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} x^2} \ldots\ldots \text{(s)}$$

Ezen kitétel legkisebb értékre jut, ha $x = o$, melly esetben $d = \pm\sqrt{b^2} = \pm b = CB = CB'$; ha x nő, d is nő, és legnagyobb értékét éri el, midőn $x = \pm a$; akkor lesz:

$$d = \pm\sqrt{b^2 + a^2 - b^2} = \pm\sqrt{a^2} = \pm a.$$

Ebből következik, hogy *minden átmérő közt, AA' a' legnagyobb, BB' pedig* a' *legkisebb. Azon felül AA' nagyobb, mint akármellyik,*
(8. kép) *a' csúcskörben huzott egyenes p.o. gg'* (8. *kép*) mert ha g és g' C-vel köttetik össze, a' $\triangle gCg'$ben:

$$gg' < Cg + Cg'$$

de a' mondottak szerint:

$$CA > Cg$$
$$CA' > Cg';$$

vagy $CA + CA' > Cg + Cg'$;

tehát annál inkább

$$AA' > gg', \text{ (mert } AA' = CA + CA')$$

6. A' 11-dik §-ban vólt:

$$a^2 - c^2 = b^2, \text{ és abból}$$
$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

$c = CF = CF'$ *nyúltságnak neveztetik* (Excentricitaet).

7. AA' és BB' minden vonalt, melly BB' vagy AA' vonalhoz közegyenes, egyenes szög alatt felez, *azért neveztetnek csúcskör' tengelyeinek; és pedig AA'* $= 2a$, *az első vagy nagy BB'* $= 2b$, *a' második vagy kis tengely-*

nek; A, A′, B, B′ vég pontjai pedig *tető pontoknak* (Scheitelpunkt).

8. Ha $a = b$, lesz

$$a^2y^2 + a^2x^2 = a^4$$
$$\text{vagy} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

t. i. a' kör, mellynek félátmérője $= a$, 's középpontja az összrendesek' kezdőpontjára esik; *a' kör tehát mint egy csúcskör tekintethetik*, *mellynek nyúltsága* $c = o$ (b szerint).

9. Ha egy pont magában a' csúcskör' kerületében van, áll az egyenlet:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2;$$

ha belül esik, p. o. mint m (9. kép), akkor a' rendes mP kisebb, mint ugyanazon metszéknek megfelelő rendes MP, azért is: (9. kép)

$$a^2 mP^2 < a^2 MP^2, \text{'s ha}$$
$$mP = y \text{ tétetik, lesz}$$
$$a^2y^2 + b^2x^2 < a^2b^2$$

Egy a' csucskörön kivűl eső m′ pontra nézve lesz, mivel,

$$m'P > MP;$$
$$a^2y^2 + b^2x^2 > a^2b^2.$$

m″ pontra nézve, mivel

$$x > a$$
$$b^2x^2 > a^2b^2$$

lesz annyival inkább:

$$a^2y^2 + b^2x^2 > a^2b^2$$

10. A' csúcskör' egyenletéből következik:

$$a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$$
$$= b^2(a^2 - x^2)$$
vagy $a^2y^2 = b^2(a+x)(a-x)$, és abból
$$y^2 : (a+x)(a-x) = b^2 : a^2, \text{ vagy}$$
(8. kép) M pontra nézve (8. kép)
$$PM^2 : A'P.\,AP = b^2 : a^2,$$
más pontra nézve lesz
$$PM'^2 : A'P'.\,AP' = b^2 : a^2$$
azért $PM^2 : A'PAP = PM'^2 : A'P'.\,AP'$
vagy, a' két közép tagot változtatva:
$$PM^2 : PM'^2 = A'P.\,AP : A'P'.\,AP'$$
ha $a = b$, lesz:
$$PM^2 : A'P.\,AP = 1 : 1 \text{ vagy}$$
$$PM^2 = A'P.\,AP.$$

11. Ha a' nagy és kis tengely felett, mint
(10. kép) átmérők felett, 2 kör rajzoltatik (10. kép), 's a' metszéknek $x = CP$, a' megfelelő kör' rendese, $y' = PM$, a' csúcsköré pedig $y = PN$, akkor a' nagyobb körnek egyenlete lesz:
$$x^2 + y'^2 = a^2, \text{ és abból}$$
$$y'^2 = a^2 - x^2$$
a' csúcskör' egyenletéből pedig következik:
$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \text{ tehát}$$
$$y'^2 : y^2 = a^2 - x^2 : \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$
vagy $y'^2 : y^2 = 1 : \frac{b^2}{a^2} = a^2 : b^2$, 's abból
$$y' : y = a : b \ldots (t)$$

Ezen tulajdonság egy módra vezet, melly szerint a' csúcskör alakítható. Ha t. i. az adott tengelyeken az említett körök rajzoltatnak, ha a' nagy tengelynek valamelly pontjában MP ⊥ AA' állítatik, 's M pont C-vel egyenes által köttetik össze, akkor CM a' kis kört valamelly L pontjában metszi; ezen ponton keresztül huzassék LN ∥ AA'. A' hasonló LMN, és CMP (∥ párhuzamos) háromszögek miatt lesz:

MP: NP = CM: CL, de mivel
MP = y', MC = a, LC = b

lesz helyettezés által (Substitution)

y': = NP = a: b,

tehát (1) szerint

NP = y, vagyis N a' csúcskörnek egy pontja.

Hasonlóképen találtathatnak a' görbének több pontjai is.

III. Négy karú vágat (Hyperbel).

§. 13.

A' négy karú vágat olly tulajdonságú egyenlapú görbe, mellynek minden M pontjából (11. kép) valamelly előre meghatárzott két ponthoz F és F' vett távolságoknak MF és MF' különbsége MF' — MF, egyenlő valamelly (11. kép) egyenessel $= 2a$. Itt is F, F′ a' gyúpontok, FM, F′M a' vezetők.

§. 14.

Ha a' két pont F és F′ az egyenes XX′ által kapcsoltatik-össze, 's FF′, C pontban feleztetik; ha továbbá azon C pontból, $CA = CA' = a$ vágatik, akkor A és A′, a' görbének két pontja; mert ezen alakitás szerint: $AF = A'F'$, tehát

A pontra nézve:

$$F'A - FA = F'A' + AA' - FA = AA' = 2a.$$

A′ra nézve:

$$FA' - F'A' = FA + AA' - F'A' = AA' = 2a.$$

A' görbe' valamelly más pontjának meghatározásánál vétessék XX′ben egy pont O″ F en kivül és huzassanak F és F′-ből A′ O″ és AO″, mint fentővel M, M′ és m, m′ pontokban magokat metsző körívek. Az által a' metszék' XX′, és rendesek YY′ tengelyére nézve, melly utólsó, C ponton keresztül megy és $\perp$ XX′, 4 részarányosan fekvő pont M, M′, m, m′, lesz meg határozva. Hogy pedig ezek a' négykarú vágatnak pontjai, abból következik, mivel p. o. M-re nézve:

$$F'M - FM = A'Q'' - AQ'' = AA' = 2a.$$

Ugyanaz áll a' többi 3 pontra nézve is. A' mutatott mód szerint a' görbének több pontja is találtathatik, ha O″ pont az egyenes vonalon XX′ tovább mozdítatik. Mivel a' háromszögben $\triangle$ F′FM

$$F'M - FM = 2a < FF', \text{ és}$$

$$AA' = 2a$$

tehát $AA' < FF'$.

t. i. a' két pont A és A' mindig F és F' közt fekszik.

§. 15.

E' görbének egyenlete' leszármaztatásánál legyenek (11. kép) XX', YY', magát C pontban metsző egyenes szög alatti öszrendesek' tengelyei; tovább $FF' = 2c$, vagy $CF = CF' = c$; valamelly M pontnak öszrendesei x, y, $F'M = u'$, $FM = u$. (11. kép)

Az egyenes háromszögből $\triangle$ FMP és F'MP következik:

$$FP^2 + MP^2 = FM^2, \text{ és}$$

$$F'P^2 + MP^2 = F'M^2 \text{ vagy}$$

$$(\alpha)\ (x - c)^2 + y^2 = u^2$$

$$(\beta)\ (x + c)^2 + y^2 - u'^2$$

Öszeadás által:

$$(\varepsilon)\ 2(x^2 + y^2 + c^2) = u'^2 + u^2$$

Lehúzás által:

$$4cx = u'^2 - u^2 = (u' + u)(u' - u)$$

vagy, mivel $u' - u = 2a$, lesz

$$u' + u = \frac{4cx}{u' - u} = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}$$

azért $u' = \frac{cx}{a} + a$,

és $u = \frac{cx}{a} - a$

ezen két érték u' és u helyett (ε)ba téve:

$$2(x^2+y^2+c^2)=\left(\frac{cx}{a}+a\right)^2+\left(\frac{cx}{a}-a\right)^2$$

$$=\frac{2c^2x^2}{a^2}+a^2$$

's abból: $a^2y^2+(a^2-c^2)\,x^2 = a^2(a^2-c^2)$
mivel pedig $a < c$, azért a^2-c^2 nemleges lesz, legyen tehát:

$$(\delta) \ldots\ldots a^2-c^2 = -b^2, \text{ akkor}$$

lesz a' négy karú vágatnak legegyszerübb egyenlete:

$$(B) \ldots a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

§. 16.

(*B*) *egyenletnek taglalasa.*

1. Ha a' négy karú vágat' egyenlete (B) a' csúcskörével (A) hasonlítatik össze, kitetszik, hogy az egyenlet (B), (A)ból egyszerüen ered, ha (A)ban b helyett $b\sqrt{-1}$ tétetik, mert $(b\sqrt{-1})^2 = -b^2$. *Tehát minden a' csúcskörnél leszármaztatott alak, a' négy karú vágatra is lesz alkalmazható, ha abban b helyett $b\sqrt{-1}$ tétetik.* Ezen helyettezés által lesz p. o. a' nyúltság' egyenletéből $c = \pm\sqrt{a^2-b^2}$

$$c=\pm\sqrt{a^2-(b\sqrt{-1})^2}=\pm\sqrt{a^2-(b^2)}=\sqrt{a^2+b^2}$$

a' mint lenni kell; mert az egyenletből (δ) következik;

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ a' görbének nyúltsága.

2, (B) egyenletet y-ra nézve fejtvén ki:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

X-re nézve:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$$

Ezen görbének pontjai is, XX' és YY' tengelyeket tekintve, részarányosan fekvők (symmetrisch).

3. Ha $x = \pm a$, lesz $y = \pm o$, *a' metszék tengelye tehát A és A' pontokban találtatik*, mert:

$$AC = + a$$
$$A'C = - a$$

4. Ha $x = o$ lesz:

$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{-a^2} = \pm b\sqrt{-1}$, azaz lehetetlen; *azért a' görbe nem érheti a' rendesek tengelyét;* és mivel általánosan, midőn $x < a$, y lehetetlen, egy pont sem eshetik Chez közelebb, mint A és A'. Ezen túl a' görbe jobbra és balra végetlenül terjed, és négy részarányos 's végetlen ágból áll, mellyek akár XX', akár YY' körül fordítatnak, egymást minden pontjaikban tökéletesen födik. Ezen négy ágból tulajdonképen a' négy karú vágat áll, ámbár a' kettő: AM és Am, vagy A'M' és A' m' is, ezen nevet viseli.

5. *Minden a' metszék' tengelyéhez közegyenes, a' rendesek' tengelye által, ahhoz közegyenes pedig a' metszék' tengelye által feleztetik*; mert minden igenleges vagy nemleges metszék' értéke, két egyenlő de ellenke-

ző rendest ád. Itt is valamint a' csúcskörnél két pont B és B′ határoztathatik, mellyre nézve $CB = CB' = b = \pm \sqrt{c^2 - a^2}$.

A' két egyenes AA′, BB′ a' görbének tengelyei; AA′ elsőnek, BB′ második tengelynek, a' két pont A, A′ tető pontnak neveztetik.

6. *Minden, C ponton által menő egyenes OO′, C-ben feleztetik;* mert ha 12-dik §. 2-dik sz. alatt (q) és (r) alakban b helyett iratik $b\sqrt{-1}$, lesz:

$$x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - A^2a^2}}$$

$$y = \frac{\pm Aab}{\sqrt{b^2 - A^2a^2}};$$

melly két alakból kivehető, hogy, mint a' csúcskörnél vólt,

$$OC = O'C;$$

azért C a' négy karú vágat' középpontjának, minden C ponton keresztül menő egyenes pedig átmérőjének neveztetik.

7. A' két utolsó egyenlet azt mutatja, hogy a' vágott pontok O és O′ csak addig lehetők, mig $b > Aa$ vagy

$$A < \frac{b}{a},$$

ha $A > \frac{b}{a}$, az átmérőnek a' metszék' tengelyére nézve ollyan helyzete LL′ lesz, hogy a' görbét sehol nem érheti. Ha ellenben

$$A^2a^2 = b^2, \text{ vagy}$$

$$A = \pm \frac{b}{a},\ \text{akkor}$$

$$x = \frac{\pm ab}{o} = \infty,\ \text{és}$$

$$y = \pm \frac{A\,ab}{o} = \infty;$$

t. i. a' pontok, mellyekben az átmérő a' görbét találja, végetlen nagy távolságra esnek. Ha tehát az átmérőnek UU, és U'U' XX're nézve illyen helyzete van hogy $< \alpha$ szögnek érintője:

$$\text{tang.}\ \alpha = A = \pm \frac{b}{a};$$

akkor ezek a' négy karú vágatot végetlen távolságban érik. Ezen különös két átmérő alakúl, ha a' tető pontban A, AK = AK' = b $\perp$ XX' állíttatik, és K, K' Cvel egyenes által kapcsoltatik össze, mert akkor lesz:

$$b = a\ \text{tang ACK, vagy}$$

$$\text{tang ACK} = \frac{b}{a}\ \text{és}$$

$$\text{tang ACK}' = -\frac{b}{a}$$

Ha a' négy karú vágatnak valamelly pontjára nézve x = CP a' metszék, mellynek a' rendes, y = PM, az egyenes UU'-nak rendese pedig y' = PN felel meg, lesz a' görbének egyenlete:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2 \ldots\ldots (m)$$

az egyenesnek egyenlete második fokra emelve:

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \; \ldots\ldots (n)$$

kivonás által:

$$y'^2 - y^2 = b^2, \text{ vagy}$$

$$(y'+y)(y'-y) = b^2, \text{ és abból}$$

$$y' - y = MN = \frac{b^2}{y'+y}.$$

Az (m) és (n) alatti egyenletből látszik, hogy ha x nő, y is növekedik, és ha

$$x = \infty,$$

$$\text{lesz } y' = \infty$$

$$\text{és } y = \infty$$

y' és y-nak ezen értéke mellett lesz:

$$MN = \frac{b^2}{\infty} = o;$$

a' két egyenes tehát a' görbéhez mindig közelít, a' nélkül, hogy azt valaha érhetné; el *azért is végetlenül közeledőknek, vagy egyszóval közeledőknek neveztetnek,* (Asymptoten), a' szög $< UCU' = 2\alpha$ pedig azoknak szöge. A' két közeledő tehát a' határ a' lehető és lehetetlen átmérők közt.

9. Ha $a = b$, lesz a' görbének egyenletéből:

$y = \pm \sqrt{x^2 - a^2}$, a' négy karú vágat ezen esetben *egyenlő oldalúnak neveztetik, és a' közeledők' szöge $UCU' = 2\alpha$, egy egyenes szög lesz*, mert

$$\text{tang } \alpha = \frac{b}{a} = 1$$

tehát $\alpha = 45°$, és $2\alpha = 90°$.

10. A' mint valamelly pont M, R, r, a' görbének vonalában, azon kivül, vagy belül esik, lesz:

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2 \begin{array}{l} + \ o \\ > \ o \\ < \ o. \end{array}$$

és itt is, mint a' csúcskörnél, az arány:

$$MP^2 : M'P'^2 = A'P.\ AP : A'\ P'.\ AP'$$

IV. A' kúpvonal (Parabel).

§. 17.

A' két karú vágat olly tulajdonságu egyenlapú görbe, mellynek valamelly pontja M, a' határzott ponthoz F, olly távol esik, mint az álló vonaltól CC'. *F a' gyúpont*, *FM a' vezető sugár* (Leitstrahl), *CC' a' vezetővonal* (Leitlinie) (12. kép). (12. kép)

§. 18.

A' mondottak szerint a' két karú vágatnak pontjai könnyen találhatók. Mert ha F ponton keresztül az egyenes BFX ⊥ CC' huzatik, a' távolság BF, A pontban feleztetvén, már ez a' görbének egy pontja, mivel FA = BA. Egy más pont' határozására állítassék P pontban egy függő, 's tétessék $FM = BP$, akkor ismét lesz M a' két karú vágatnak pontja, mert $MF = PB = MD$; mi feltétele a' görbének. E' szerint hataroztatik a' részarányosan fekvő pont M', és a' görbének többi pontja is, mellyek, ha folytonos vonal által köttetnek össze, a' két karú vágatot képzik.

§. 19.

E' görbének egyenlete' leszármaztatásánál legyen AX a' metszék' tengelye, A az öszrendesek' kezdő pontja; továbbá $AB = AF = \frac{1}{2} BF = c$, M pontnak öszrendesei x, y, 's a' megfelelő vezető

$$FM = u.$$

(5-dik §. 7-dik sz.) szerint, a' rendesek' tengelyéhez YY' párhuzamos vonalnak MM' egyenlete:

$$x = AP = BP - AB$$

vagy $$x = u - c. \quad \ldots \quad (\alpha)$$

Az egyenszegű $\triangle$ből FMP van:

$$FP^2 + MP^2 = FM^2, \text{ vagy}$$

$$(x - c)^2 + y^2 = u^2 \quad \ldots \quad (\beta)$$

ha az (α) egyenletből az érték

$$u = x + c, \ (\beta)\text{ba tétetik;}$$

lesz: $(x - c)^2 - (x + c)^2 + y^2 = o.$

vagy: $y^2 = 4cx$,

és ha $4c = p$,

a' két karú vágatnak legegyszerűbb egyenlete lesz:

$$(C) \ \ldots \ y^2 = px.$$

§. 20.

(*C*) *egyenletnek taglalása.*

Ezen egyenletből következik:

$$y = \pm \sqrt{px}$$

1. *A' görbe a' két, gyökér előtti, jegy miatt, két a' metszék' tengelyére nézve részarányos ágból áll,* mellyek mivel x-nek csak igenleges értéke lehet, az igenleges metszékek' óldalára terjednek vég nélkül. Az egyenes AX, melly valamennyi YY'hoz közegyenes vonalt felez, a' két karú vágatnak tengelye. Ha p nemleges volna, akkor a' két ág a' nemleges metszékek' óldalára terjedne vég nélkül.

2. Ha $x = o$, lesz $y = \pm o$; vagyis a' kezdő pont A. *Ezen pont A a' két karú vágat' tető pontjának neveztetik.*

3. Ha $x = AF = \frac{1}{4}p = c$,

$$\text{akkor: } y = FO = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2} = \pm \tfrac{1}{2}p.$$

$$\text{tehát } OO' = 2\tfrac{1}{2}p = p.$$

melly a' két karú vágat' nyujtójának neveztetik (parameter).

4. A' görbének egyenlete

$$y^2 = px;$$

más pontra nézve:

$$y'^2 = px'$$

$$\text{tehát } y^2 : y'^2 = px : px' = x : x'.$$

§. 21.

Általános másod rendü egyenlet.

Mindenek előtt szükséges lesz megmutatni, hogy valamelly szabályos görbe' egyenletének foka nem az önkényesen fölvett öszrendesek' rendszerétől és helyzetétől, hanem magától a' görbe' természetétől függ.

(13. kép) Arra nézve legyenek (13. kép) XX', YY' a' függőleges rendszer' tengelyei, mellyek szerint a' görbe eredetileg határoztaték, és $AP = x$, $PM = y$, M pontnak öszrendesei. Az új függőleges UU', TT', rendszerre nézve, legyenek $A'P' = x'$, $P'M = y'$ ugyanazon pontnak M, új öszrendesei. Ha a' görbét az új öszrendesek szerint akarjuk meghatározni, szükséges az előbbi öszrendeseket az utóbbiak és általánosan azon értékek által kifejezni, mellyek az új tengelyek' helyzetét az elsőbbi tengelyekre nézve határozzák meg, ezen czélra legyen $AB = CA' = a$ és $AC = BA' = b$

lesz .. $x = a + x'$

és $y = b + y'$

Ha tehát a' görbe az új rendszerre vitetik által, 's x helyett $a + x$, y helyett pedig $b + y$ tétetik a' görbének egyenletébe, világos, hogy az új

egyenlet sem lehet különböző rendü. Ha ellenben a' kezdőpont változatlan marad (14. kép) (14. kép)
és a' függőleges öszrendesek' tengelyei A körül forognak, mig UAX $= < \alpha$, ha továbbá: $RP' \parallel AX$, $P'Q \parallel AY$,

lesz: $x = AP = AQ - QP'$

vagy $x = x' \text{Cos}\,\alpha - y' \text{Sin}\,\alpha$

épen úgy: $y = PM = UP' + RM$.

vagy: $y = x' \text{Sin}\,\alpha + y' \text{Cos}\,\alpha$.

azért lesz x helyett:

$$(1)\ x\,\text{Cos}\,\alpha - y\,\text{Sin}\,\alpha$$

y helyett: $(2)\ x\,\text{Sin}\,\alpha + y\,\text{Cos}\,\alpha$.

Hasonlóképen mutathatik, hogy, ha valamelly görbe akár hegyes, akár függőleges öszrendesek' rendszeréből egy másikra akár hegyesre akár függőlegesre vitetik által, a' fok (gradus) annak egyenletében nem változik. Ha tehát a' görbének egyenlete:

$$Ax^n + Bx^{n-1}y + Cx^{n-2}y^2 + \ldots + Mx^q y^r + .$$

mellyben $q+r$ legfeljebb $= n$, lesz az átváltoztatás után:

$$A'x^n + B'x^{n-1}y + C'x^{n-2}y^2 + \ldots + M'x^q y^r.$$

§. 22.

Az általános 2-dik rendü egyenletnek x és y közt az a' formája.

$$(1)\ Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o.$$

A' következőkben vizsgálni fogjuk: mellyek az (1) alatti egyenlethez, ha minden ösztevő végesnek vétetik, tartozó görbék?

Hogy ezen egyenlet taglalásra alkalmasb legyen, szükség azt egyszerűbb alakra hozni, mellyre találunk, ha az egyenlettel, mint a' függőleges öszrendesek' rendszeréhez tartozóval bánunk, mivel így legegyszerűbben több tag ki fog iktattathatni.

Hogy a' tag, mellyben xy fordúl elő, kiiktathassék, képzeljük, hogy a' két tengely A körül, mint az öszrendesek' kezdő pontja körül, bizonyos α szeglettel fordúljon el, akkor az (1) egyenletben, 21-dik § szerint

$$x \text{ helyett: } x \operatorname{Cos} \alpha - y \operatorname{Sin} \alpha$$
$$y \text{ helyett: } x \operatorname{Sin} \alpha + y \operatorname{Cos} \alpha$$

kell tennünk, miből lesz:

$$A (x \operatorname{Sin}\alpha + y \operatorname{Cos}\alpha)^2 + B (x \operatorname{Cos}\alpha - y \operatorname{Sin}\alpha) (x \operatorname{Sin}\alpha + y \operatorname{Cos}\alpha) + C (x \operatorname{Cos}\alpha - y \operatorname{Sin}\alpha)^2 + D(x \operatorname{Sin}\alpha + y \operatorname{Cos}\alpha) + E(x \operatorname{Cos}\alpha - y \operatorname{Sin}\alpha) + F = o.$$ És abból kifejtés által:

$$Ax^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 + Ay^2 \operatorname{Cos}\alpha^2 + 2A\,x\,y \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha + Bx^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha + Bxy \operatorname{Cos}\alpha^2 - Bxy \operatorname{Sin}\alpha^2 - By^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha + Cx^2 \operatorname{Cos}\alpha^2 + Cy^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 - 2Cxy \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha + Dx \operatorname{Sin}\alpha + Dy \operatorname{Cos}\alpha + Ex \operatorname{Cos}\alpha - Ey \operatorname{Sin}\alpha + F = o.$$

vagyis rendezve:

I.

$$(A \operatorname{Cos}\alpha^2 - B \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha + C \operatorname{Sin}\pi^2)\, y^2 +$$

II.

$$(A \operatorname{Sin}\alpha^2 + B \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha + C \operatorname{Cos}\alpha^2)\, x^2 +$$

III.

$+(2A\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\alpha - B\mathrm{Sin}\alpha^2 + B\mathrm{Cos}\alpha^2 - 2C\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\alpha)xy +$

IV.

$(D\ \mathrm{Cos}\ \alpha + E\ \mathrm{Sin}\ \alpha)\ y +$

V.

$+ (D\ \mathrm{Sin}\ \alpha + E\ \mathrm{Cos}\ \alpha)\ x + F = o$

vagy ha rövidség' okáért

az ösztevő: I = M

„ II = N

„ III = L

„ IV = R

„ V = S tétetik

lesz: $My^2 + Nx^2 + Lxy + Ry + Sx + F = o$

Hogy tehát a' tag Lxy kiiktathassék, az ösztevő L tétessék = o.

Mivel pedig: $r\ \mathrm{Sin}\ \alpha\ \mathrm{Cos}\ \alpha = \mathrm{Sin}\ 2\ \alpha$

és $\mathrm{Cos}\ \alpha^2 - \mathrm{Sin}\ \alpha^2 = \mathrm{Cos}\ 2\ \alpha$,

lesz a' III alatti ösztevőben:

$L = 2A\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\alpha - B\mathrm{Sin}\alpha^2 + B\mathrm{Cos}\alpha^2 - 2C\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\alpha = o$

$(A - c)\mathrm{Sin}\ 2\alpha + B\ \mathrm{Cos}\ 2\alpha = o$, és abból:

$$\frac{\mathrm{Sin}\ 2\ \alpha}{\mathrm{Cos}\ 2\ \alpha} = \mathrm{tang}\ 2\alpha = \frac{-B}{A-C}.$$

És ezen értékért, melly az érintő' tulajdonsága szerint mindig lehető, lesz:

$L = o$,

's a' tag Lxy az egyenletből ki van iktatva; azért van:

(2) $My^2 + Nx^2 + Ry + Sx + F = o.$

Hogy a' (2) egyenletből még a' Ry és Sx tagok, is kiiktattathassanak, az öszrendesek' kezdete, mozdítassék tovább ollyformán, hogy az új tengelyek közegyenesek maradjanak az előbbiekhez. 21-dik § szerint tehát, x helyett, $x+a$, y helyett, $y+b$ tétessék, és lesz:

$$M(y+b)^2+N(x+a)^2+R(y+b)+S(x+a)+F=o.$$

vagyis rendezve:

$$My^2+Nx^2+(2Mb+R)y+(2Na+S)x+Mb^2+ Na^2+Rb+Sa+F=o.$$

A' két említett tag' kiiktatására tetessék

(α) $2Mb+R=o$ és

(β) $2Na+S=o$'s abból a és b-ét meghatározván:

$$(\varepsilon)\ a=-\frac{S}{2N};\ (\delta)\ b=-\frac{R}{2M}$$

a és b értékére nézve következő 3 fölvétel állhat:

1. Tegyűk, hogy M és N, O-tól (zerótól) különböző, vagyis a' (2) egyenletben sem a' tag My^2, sem az Nx^2 nem hibázik, azon esetben a és b lehető és véges mennyiségek, 's a' (2) egyenlet ezen alakot nyeri:

$$(3)\ My^2+Nx^2=P$$

itt $P=-(Mb^2+Na^2+Rb+Sa+F)$

2. Lehet, hogy vagy M vagy $N=o$; ha p. o. $N=o$, ellenben M, R, S, vagy legalább, M és S nem$=o$, lesz b értéke véges, ellenben $a=\infty$ (ε és δ szerint), mi azt mutatja, hogy a' (2) egyenlet nem változtathatik által a' (3) alatti alakra, hanem más alakot nyer, melly szerint a' tag Ry, és F esik ki; mi végre

(α) $2Mb + R = o$, és

(β) $Mb^2 + Rb + Sa + F = o$ tétetvén lesz:

(ε') $b = -\frac{R}{2M}$, véges;

(δ') $a = -\frac{Mb^2 + Rb + F}{S}$ szinte véges.

a' szerint a' (2) egyenletnek következő alakja lesz:

$My^2 + Sx = o$, és abból

$y^2 = -\frac{S}{M}x$ és ha $-\frac{S}{M} = Q$ tétetik:

(4) $y^2 = Qx$.

Ha $M = o$ és $N = o$ volna, akkor az *általános (1) egyenletből a' kör' egyenlete következnék*, a' mi csak egy különös eset volna. T. i. ezen fölvétel szerint az I-ső és II alatti ösztevőből lenne:

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{A - C}{B},$$

az előbb vólt: $\text{tang } 2\alpha = = \frac{B}{A - C}$, tehát

$$\frac{A - C}{B} = -\frac{B}{A - C}, \text{ miből}$$

$A = C$, és $B = o$.

Ezen értékkel lesz az (1) egyenletben

$$\text{(m)} \quad y^2 + x^2 + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}x + \frac{F}{H} = o,$$

melly a' kör' egyenlete; mert ha (15. kép) (15. kép)

$AP = x$, $PM = y$, M pont' öszrendesei, és $AQ = p$, $CQ = q$ a' közép pont' öszrendesei, lesz:

$$CM^2 = CR^2 + RM^2 \text{ vagy}$$
$$r^2 = (x - p)^2 + (y - q)^2, \text{ miből}$$
$$y^2 + x^2 - 2qy - 2px + p^2 + q^2 - r^2 = o.$$

tehát az (m) egyenletben

$$\frac{D}{A} = -2q, \quad \frac{E}{A} = -2p,$$

és $$\frac{F}{A} = p^2 + q^2 - r^2.$$

3. Ha $N = o$ és $S = o$, vagy $= o$ és $R = o$ volna, úgy hogy az Lxy tag' kiiktatása által, az (1) egyenletből, egyszersmind azon tagok esnének ki, mellyekben x^2 és x, vagy y^2 és y előfordúl; akkor ha például $N = o$ és $S = o$, lesz

$$b = -\frac{R}{2M} \text{ véges, és}$$

$$a = \frac{o}{o} \text{ határozatlan mennyiség.}$$

Ezen esetben a' (2) egyenletből következik:

$$My^2 + Ry + F = o. \text{ vagy}$$

$$4) \quad y = -\frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4MF}}{2M},$$

melly két, a' metszékek' tengelyével, közegyenesnek egyenlete.

Ha $M = o$, és $R = o$, lesz

$$(5) \quad Nx^2 - Sx + F = o, \text{ vagy}$$

$$(5') \; x = -\frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4NF}}{2N.}$$

t. i. két, a' rendesek' tengelyével közegyenesnek, egyenlete.

A' tett vizsgálások szerint az általános egyenlet (1), vagy az alakra

$$(3) \; My^2 + Nx^2 = P$$

vagy erre (4) $y^2 = Qx$ vitethetik.

§. 23.

(3) *alatti egyenletnek taglalása*

Az egyenletben:

$$My^2 + Nx^2 = P$$

az össztevő M mindig igenlegesnek vétethetik, mert ha nemleges volna, jegyek' változtatása által igenlegessé válnék. N és P össztevökre nézve következő fölvételek állhatnak.

1. N igenleges, és

a) P is igenleges; ezen esetben a' (3) egyenlet, a' csúcskörnek felel meg, mellyben: $M = a^2$, $N = b^2$, és $P = a^2 b^2$.

Ha azon fölül $M = N$, lesz:

$$x^2 + y^2 = \frac{P}{M},$$

vagyis a' kör' egyenlete.

b) P nemleges, melly fölvétel ád:

$$y = \pm \sqrt{\frac{-Nx^2 - P}{M}},$$

vagyis lehetetlen görbének egyenlete.

c) Ha P = o, lesz;

$My^2 + Nx^2 = o$, melly egyenlet csak akkor állhat, midőn

$$My^2 = o, \text{ és } Nx^2 = o, \text{ vagyis}$$

$$y = o \text{ és } x = o,$$

mellyek egy pont' (a' kezdő pont') egyenletei.

2. N nemleges, és

a) P is nemleges, melly esetben van:

$My^2 - Nx^2 = -P$ *a' négy karú vágat' egyenlete, mellyben:*

$$M = a^2, \; N = b^2, \text{ és } P = a^2 b^2.$$

's a' metszékek az első tengelyen olvastatnak.

b) P igenleges; ezen fölvétel alatt lesz:

$$My^2 - Nx^2 = P,$$

vagyis a' négy karú vágat' egyenlete, mellyben a' metszékek a' rendesek' tengelyén olvastatnak; mert jegyek' változtatása által van:

$$-My^2 + Nx^2 = -P,$$

ha most y, x-el cseréltetik fel, lesz:

$$Ny^2 - Mx^2 = -P, \text{ mellyben:}$$

$$N = a^2, \; M = b^2, \text{ és } P = a^2 b^2.$$

Ha N = — M, a' négy karú vágat egyenlő óldalu lesz. Ha

c) P = o, akkor van:

$$My^2 - Nx^2 = o \text{ vagy}$$

$$y = \pm x \sqrt{\frac{N}{M}}$$

vagy két egyenesnek egyenlete, melly a' kezdő ponton keresztülmegy.

§. 24.

(4) *alatti egyenletnek taglalása*

Ha a' (4) egyenletben $y^2 = Qx$

1. Q igenleges, akkor ezen egyenlet *a' kúpvonal' egyenlete, mellynek nyujtója* = Q *'s mellynek tengelye a' metszékék' tengelyével esik össze, 's ágai az igenleges metszékek' óldalán terjednek.*

2. Ha Q nemleges, a' (4) egyenletnek *ismét a' kúpvonal felel meg*, ezen különbséggel, hogy most a' görbe a' nemleges metszékek' óldalán fekszik.

3. A' 22-dik §-ban talált két egyenest·

$$y = -\frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4MF}}{2M},$$

a' kúpvonalnak alárendelhetni, 's a' mint

$$R^2 - 4MF = o$$
$$> o$$
$$< o$$

úgy, vagy egy egyenes, vagy két közegyenes, vagy két lehetetlen egyenes ered.

§. 25.

A' (3) és (4) alatti egyenlet vizsgálásából kivehető, hogy az általános (1) egyenlet csak következő görbéket foglal magában:

1. A' csucskört, mellynek alá van rendelve:

a) A' kör.

b) A' pont.

c) Egy lehetetlen görbe.

2. A' négy karú vágatot, mellyhez tartozik:

a) Az egyenlő óldalú.

b) A' két, egymást a' kezdőpontban metsző egyenes.

3. A' kúpvonalt; ide való még:

a) A' két közegyenes.

b) Egy egyenes.

c) Két lehetlen egyenes.

§. 26.

Az eddigi leszármaztatásokból kitetszik, hogy, ha az általános második rendü egyenletet (1), mig a' kör', négykarú vágat, és a' kúpvonalnak egyenleteit nem ismertük, a' (3) és (4) alatti alakra hozattatott, 's a' (3) és (4) egyenlet alakítatott volna: akkor csakugyan az említett görbékre, 's csak ezekre akadtunk volna, mivel mást az (1) egyenlet nem foglal magában, mi jelesleg azért említetik itt, hogy az új rendszer szerínt teendő vizsgálatoknál ez utóbbi úton könnyebben haladhassunk előre.

§. 27.

Miután a' mód, melly szerint a' görbék öszrendesek által határoztatnak, megmutattatott, 's ezen mód szerint az 1-ső és 2-od rendü görbék' száma és tulajdonságai azon czélból fejtettek ki, hogy a' régi és új mód között a' különbség annál inkább kitessék: most már a' következő szakaszban a' t. m. tudós társaság által feladott kérdés' vizsgálatába bocsátkozom; melly a' következő.

„A' görbék' meghatározásában jelenleg a' görbe' „mindenkori hossza és érintőinek szőge is vétetnek ele„mekül. Mellyek tehát ezen nézet szerint az első és má„sod rendü görbék? Vitessenek ezek által öszrendesekre „és adassanak elő több tulajdonságaik."

II. SZAKASZ.

Az első és másod rendü görbék az új vagy eredeti rendszer' nézete szerint. Azoknak néhány tulajdonsága. Átvitelök az öszrendesekre.

I. FEJEZET.

Első rendü görbék.

Előleges magyarázatok.

§. 28.

1) Az utolsó határ a' térben pontnak neveztetik.

2. A' pont' mozdúlása vonalt képez.

3. Ha a' pont mozdúlásában irányát megtartja: egyenes vonal ered. Ez tehát a' legegyszerűbb kiterjedés a' térben, minden részeinek irányváltozása nélkül (ohne Richtungsveraenderung).

4. Ha ellenben mozdulása közben irányát változtatja: vagy tört vagy görbe vonal képeztetik (die gebrochene, oder krumme Linie).

a) Az első ered, ha az irányváltozás csak egyes pontokban történik. A' tört vonalnál te-
(16. kép) hát (16. kép) a' két elem „haladás és forgás vagy irányváltozás" (Fortschritt und Drehung) nem esik össze; t. i. ab, bc, cd-nek haladása alatt nincs forgás, ellenben α és β-nak forgása közben nincs haladás.

b) A' görbe pedig ered, ha az irány a' haladásnak minden pontjában változik. Itt a' legcsekélyebb haladás, irányváltozás nélkül, a' legkisebb irányváltozás, haladás nélkül nem történhetik; vagy a' pont haladván, egyszersmind
(17. kép) forog (17. kép) Itt tehát a' két elem, „haladás és forgás" összeesik.

§. 29.

Minden görbénél szükséges, tehát hogy a' pont' haladása folytonos irányváltózással járjon. Ha az egy térségben esikmeg, az egyenlapú (ebene) görbe képeztetik. Ennek minden bármilly közel egymáshoz eső pontjában különböző iránya van.

A'görbének valamelly pontjában c (17. kép) tulajdon iránya egy egyenes cc' által fejeztetik ki, melly egyszersmind a' görbének érintője. Az egyenes cc' azon irányba esik, mellyet a' pont, ha innentúl forgás nem történnék, keresztül futna. A' kezdő pontban a a' görbének iránya aa'; folytonosan forogván és egyszersmind haladván bb', azután cc', dd' .... irányba megy által. A' szög $< \alpha = d'mc'$, melly a' görbének két érintője által képeztetik, a' két pont d és e közt a' folytonos forgás' öszvetét foglalja magában. (17. kép)

Folytonos haladás szakadatlan irányváltozással a' görbének lényege. De hogy ez, tudákságosan vizsgáltathassék, szükség, hogy a' haladás és forgás, vagy más szóval a' görbének hossza 's érintőinek szöge közt, valamelly függvény adassék, melly a' görbe' minden pontjának feleljen meg. Mivel, ha egyszer ezen függvény adva van, a' forgás' értéke a' haladástól függ; és megfordítva: azért a' fölteendő egyenletekben két, egymástól függő változó, t. i. a' haladás $=$ l, és a' forgás $=$ w, szóba jő. A' haladások a' „kezdőponttól“ (Anfangspunct) a' forgások az „első iránytól (Anfangsrichtung) olvastatnak. Hogy valamelly bizonyos görbe eredjen, bizonyos egyenlet a' két változó közt szükséges, melly mutatja, miképen a' kezdőponttól olvasott haladás az első iránytól számítatott forgástól függ? ,s megfordítva. A' számok, mellyek által a' haladás és forgás fejeztetik ki, névtelenek (absolutzahlen); a' haladás' egysége (Einheit) bizonyos hossz; a' forgás' egysége a' szög, melly p. o. egy egyenes szög (fertályszög), vagy fél- vagy egész fordúlás lehet 'stb.

§. 30.

Ha f és φ valamelly általános függvényt jelent, az egyenlapú görbéknek legáltalánosb egyenlete lesz:

$$l = f(w), \text{ és } w = \varphi(l)$$

Ha különös esetben p. o. a' függvény

$l = \frac{1}{2}$ w adatnék, lenne ha

a' forgás	$\frac{1}{2}$,	a' haladás		$\frac{1}{4}$
„	1	„	„	$\frac{1}{2}$
„	2	„	„	1
a' forgás	4	a' haladás		2
„	20	„	„	10

. . . .

Ha ezen példában a' haladás' egysége l = 4 a' forgás' egysége w = 90° vétetnék, akkor lenne, ha

a' forgás	45°,	a' haladás		1
„	90°	„	„	2
„	180°	„	„	4
„	360°	„	„	8
„	1800°	„	„	40.

. . . .

Ezen mód szerint, a' görbének minden pontjára nézve, forgásának megfelelő haladása határoztathatik meg.

§. 31.

Ha valamelly egyenlet két változóval adatott, 's vagy l vagy w szerint fejtetett ki, a' görbe, l és w értékei által, alakítható. Legyen p. o ezen egyenlet:

$$w = 2l;$$

$pq = l = 1$ a' haladások' egysége (18. kép) (18. kép)

$< mon = w = 1$ a' forgások' egysége;

a legyen a' kezdő pont, és aa'' az első irány;

ha $l = 1$ lesz

$$w = 2$$

csináltassék tehát $< a'' a a' = 2 < mon$, és $ab = pq = 1$.

ha $l = 2$, lesz

$$w = 4,$$

az első hosszt és forgást a' másodikból levonván lesz:

$$2 - 1 = 1, \text{ és } 4 - 2 = 2;$$

csináltassék tehát ismét $< a' b b' = 2 < mon$ és

$$bc = pq = 1.$$

és igy tovább. Ezen görbe annál tökéletesebben lesz meghatározva, mennél kisebbek a' különbségek $C - C'$, (mellyek itt $= 1$).

Szigorú vizsgálat még az előjegyek ($\pm$) iránt szükséges. Legyen A (19. kép) a' kezdő- (19. kép)

pont, és AB az első irány. A' haladás közben a' forgás vagy jobbra E felé, vagy balra F felé történhetik, úgy, hogy AE és AF a' görbének megfelelő kezdetei lennének, mellyek nagyobb érthetőség' okáért, kis egyenesek által tétettek ki. Ezen két forgás egymással ellenkező, 's ha egyenlő, egyik a' másikat tekéletesen törli el; azért ezen két forgás ellenkező jegyekkel láttatik el. Ha a' forgás jobbra igenleges, a' forgás balra
(19. kép) nemleges lesz. Ha (19. kép) AFGH valamelly görbét jelent, a' nemleges forgások $<$ BAF, $<$ DFG, $<$ MGH lesznek; $<$ FHN pedig igenleges. A' forgás' öszvete tehát:

$$= FHN - BAF - DFG - MGH$$

Az ollyan pontban mint H mindig az egyik forgás' legnagyobb értéke (maximum) tehát az ellenkező forgásnak legkisebbje (minimum) vagyis kezdete van.

A' forgás AB′-tól AC′ felé igenleges, AD′ felé pedig nemleges, mert itt is, ha A-tól B′ felé, nem pedig B′-től A felé nézünk, AC′ jobb, AD′ ellenben bal oldalon fekszik; mellynek úgy léte onnan is kitetszik, mivel, ha BB′, A körül forog, és AB, AC′-re jő, akkor AB′, AC′-re érkezik, és mig AB, AD-re jő, addig AB′ is AD′-re jutott.

Valamint a' forgások úgy az ellenkező haladások is ellenkező jegyekkel láttatnak el; ha p. o. a' haladások B felé igenlegesek, azok B′ felé nemlegesek lesznek, 's azért ellenkező jegyekkel elláttatandók. Az adott példában a' haladások igenlegesek, tehát azoknak öszvete:

$= AF + FG + GH\ HI. =$

Azért a' kezdőpontra A, és az első irányra AB nézve a' görbének kezdetei lesznek:

AE vonalra nézve: .... + w, + l
AF „ „ — w, + l
AE' „ „ + w, — l
AF' „ „ — w, — l

Némelly esetben a' görbének kezdő pontja elmozdítatik, 's akkor l helyett: l' ± a, szükség tenni: világos, hogy az által a' görbének egyenlete változhatik, de maga a' görbe mindig változatlan marad, még akkor is, ha azon kivül az első irány w más irány által p: o. w' ± b által, fejeztetik ki.

§. 32.

Az igenleges és nemleges forgások- és haladásokra nézve következő 4 eset áll:

1. A' két elem „haladás és forgás" a' görbének valamelly pontjában igenleges marad, ha igenleges volt. Illyen pont a' görbének egy *közönséges pontja* (20. kép) b pont. (20. kép)

2. Ha valamelly pontban az eddigi akár igenleges, akár nemleges haladás megmarad, a' forgás pedig ellenkezővé válik: akkor *a' fordulatpontja* ered (Wendungspunct). (21. kép) b pont. (21. kép)

Itt a' haladás és forgás *a*-tól *b*-ig igenleges, *b* pontban pedig a' haladás még azontúl is igenleges maradván, a' forgás nemlegessé válik. Ha az igenleges forgás *a*-tól *b*-ig egyenlő volna a' nemlegessel *b*-től *e*-ig, akkor lenne

$$< \alpha = < \alpha'$$

tehát aa' $\|$ cc' és a' forgásnak öszvete

$$\alpha - \alpha' = o.$$

Ha a' haladás *a*-tól *b*-ig = A, *b*-től *c*-ig = B; a' haladás öszvete lesz:

$$A + B.$$

3. Ha ellenben a' forgás változatlan marad, a' haladás pedig ellenkező irányú: akkor a' *csúcs*
(22. kép) képeztetik (Spitze) (22. kép) *b* pont.

Itt valamint a' haladás úgy a' forgás is *a*-tól *b*-ig igenleges; b ponban változik az igenleges haladás bb', és az ellenkező irányú haladásba bb'' megy által; a' forgás pedig igenleges marad. Ha $< \alpha' = 180^\circ - < \alpha = < \beta$, akkor lesz aa' $\|$ cc', és a' forgás' öszvete: $\alpha + 180^\circ - \alpha' = 180^\circ$

A' haladás összesen lesz = A — B.

4. Ha végtére a' haladás és egyszersmind a' forgás is a' görbének valamelly pontjában *b* ellenkezőbe megy által egy *orr* képeztetik
(23. kép) (Schnabel) (23. kép) b pont.

T. i. *a*-tól *b*-ig a' haladás és forgás igenleges, b pontban pedig mind a' két elem nemlegessé válik. A' haladás összesen lesz:

$$A - B;$$

a' forgás pedig, ha ismét $< \alpha = < \alpha'$

$< \alpha - < \alpha' = o$, és $aa' \parallel cc'$.

A' csúcs és orr visszatérő pontoknak is (Rückkehrpunct) neveztetnek, mind a' kettőben a' haladás ellenkező irányú. Mind a' három pedig, t. i. *a' fordúlatpont*, *csúcs* és *orr* általánosan *átmenőpontoknak* neveztetnek (Uibergangspuncte), mivel azokban vagy a' forgás, vagy a' haladás, vagy mind a' kettő ellenkezőbe megy által.

Eddig *b* pont' határozása, már az előtte levő haladásokra és forgásokra nézve, történt. Ha ellenben a' vizsgálás magából *b* pontból, mint kezdő pontból történik; akkor az említett 4 pontra nézve, épen az ellenkező föltételek következnek t. i:

1'. Egy pont, mellyből valamint a' haladás, úgy a' forgás is, ellenkezővé lesz, a' görbének egy *közönséges pontja* (20. kép) *b* pont. (20. kép)

2'. Ha valamelly pontból számítva, csak a' haladás ellenkező irányú, a' forgás pedig nem, akkor azon pont *fordúlatpont*. (21. kép) *b* pont. (21. kép)

3'. Ha valamelly ponttól kezdve, a' forgás ellenkezővé válik, a' haladás pedig nem, akkor a' *csúcs* képződik. (22. kép) *b* pont. (22. kép)

4'. Ha valamelly pontból sem a' haladás sem a' forgás nem változik, az *orr* képeztetik. (23. kép) *b* pont. (23. kép)

§. 33.

A' kérdés: valamelly görbének vajjon minden pontja közönséges-e? vagy találtatnak köztök átmenő pontok is? — az adott egyenletből határoztathatik;

Haladás' tekintetében:

1. Tétessék l = o, 's vizsgáltassék vajjon innen a' haladás *l* csupán csak igenleges, vagy csak nemleges, vagy valamint igenleges, úgy nemleges értéket is nyerhet; az által a' kérdés a' kezdőpontra nézve eldöntetik, mert az első esetben egy *visszatérő*, a' másodikban vagy egy *fordúlat-* vagy egy *közönséges* pont alakúl (32 §., 1', 2', 3', 4' szerint).

2. Az adott egyenletből:

$$w = f(l)$$

kerestessenek azon értékek, mellyek szerint a' haladás *l* maximum, mert az elem *l* azontúl ellenkezővé válik, 's az által értéke fogy. Ha a' szerint találtatik, hogy a' görbe, haladása közben, ellenkező irányba megy át: akkor annyi visszatérő pontja lesz, a' mennyi átmenet van az ellenkező haladásba. Ha illyen átmenet nem találtatik, *a' görbének visszatérő pontja nem lesz.* (32. §. 1, 2, 3. 4.)

Forgás' tekintetében.

1'. Az első iránytól (w = o)tól kezdve, a' forgásra nézve, vagy csupán csak igenleges, vagy csak nemleges, vagy pedig, valamint igenleges, úgy nemleges érték is, az adott egyenletben lehető. Az első esetben azon pont, mellyben az első irány létezik, vagyis az első irány pontja, vagy *orr* vagy *fordulatpont*; a' második esetben vagy *csúcs*, vagy *közönséges pont*, a' mint a' haladás vagy egynemü, vagy ellenkező.

2'. Ha az adott egyenletben

$$l = \psi(w)$$

az egynemü fogások' maximumát keressük, 's látjuk, hogy az eddigi igenleges vagy nemleges forgás, ellenkezővé válik: akkor a' görbének annyi átmenőpontja lesz, mennyi átmenet van az ellenkező forgásba. Ha ilylyen átmenet nem találtatik, akkor a' görbének átmenőpontja nem lesz.

§. 34.

Általános első rendü egyenletnek taglalása.

Az általános első rendü egyenletnek két változóval l és w, ezen formája van:

(1) $Aw + Bl + C = o$

1. Ha $A = o$ és $B = o$, akkor egyszersmind $C = o$, t. i. *egy egyenlet, minden haladás es forgás nélkül.*

2. Ha $A = o$, és $C = o$, lesz

$$Bl = o, \text{ vagy } l = o$$

azaz, *haladás még nem történt.* Ezen egyenlet tehát a' *kezdőpontot* jelenti.

3. Ha $B = o$, és $C = o$, lesz

$$Aw = o, \text{ vagy } w = o;$$

t. i. *forgás meg nem történt*. Ezen egyenlet tehát az *első irányt* jelenti.

4. Ha $A = o$, ellenben B és C véges értékü, akkor lesz:

$$Bl + C = o, \text{ miből}$$

$$l = -\frac{C}{B}$$

t. i. valamelly határzott haladás, forgás nélkül, vagyis *valamelly határzott egyenes*. Ezen egyenesnek fekvése igenleges, ha B és C jegyei ellenkezők, nemleges pedig, ha egynemüek.

5. Ha $B = o$, ellenben A' és C véges értékü, akkor lesz:

$$Aw + C = o, \text{ vagy}$$

$$w = -\frac{C}{A}$$

melly egyenlet határzott forgást, haladás nélkül, vagyis az *egyenlapú szöget* jelenti. Ezen szögnek fekvése igenleges, ha A és C jegyei ellenkezők, nemleges pedig, ha egynemüek.

6. Ha $C = o$, ellenben A és B-nek véges értéke van, akkor lesz:

$$Aw + Bl = o, \text{ és abból:}$$

$$(2) \ldots\ldots l = -\frac{A}{B} w$$

Mivel itt a' haladás forgással együtt jár: azért ezen

(2) egyenlet, valamelly görbének felel meg; mivel pedig a' haladás l, a' forgással w, a' görbének minden pontjában, egyenes arányban áll: *azért ezen* (2) *egyenletnek a' kör felel meg*. Annak bebizonyitására legyen (24. kép) (24. kép) $<$ w valamelly szög, melly a' két érintő aa', és bb' által, alakúl; ha továbbá oa és ob félátmérője a' körnek, akkor lesz

$$oa \perp aa', \text{ és } ob \perp bb',$$

$$\text{tehát } \angle\alpha + \angle\beta + \angle\varepsilon + \angle\delta = 360^\circ = 4R$$
$$\text{és } \angle\varepsilon + \angle\delta = 180 = 2R$$

$$\text{lehúzás által: } \angle\alpha + \angle\beta = 180 = 2R$$
$$\text{mint mellék szögek: } \beta + w = 180 = 2R$$

$$\text{tehát } \angle\alpha - \angle w = o$$
$$\text{vagy } \angle\alpha = \angle w$$

Mivel pedig a' középponti szögek (Centriwinkel) $<\alpha$, egy arányban állanak iveikkel: következik, hogy a' forgás' szögletei is azon arányban vagynak, a' mint a' (2) egyenlet mutatja.

Ha A és B jegyei a' (2) egyenletben ellenkezők, akkor következő alakja lesz:

$$l = \frac{A}{B} w.$$

Most minden igenleges vagy nemleges forgásnak igenleges vagy nemleges haladás felel meg. Igenleges értékek által a' körív *ab*, nemlegesek által pedig a' körív *ab'* képeztetik. Ezen

kör fekszik az első iránynak aa' jobb óldalán. Az első irány egyszersmind érintője a' kör-
(25. kép) nek. (25. kép) aa'.

Ha A és B jegyei egynemüek, akkor lesz:

$$l = -\frac{A}{B}w.$$

Most minden igenleges forgás nemleges haladást, minden nemleges forgás pedig igenleges haladást képez; első esetben a' körív ac',
(25. kép) másodikban ac alakúl (25. kép) A' kör az első iránynak, melly egyszersmind érintő, bal óldalán fekszik.

Ha $w = o$, lesz egyszersmind $l = o$; t. i. az első irány' pontja a' kezdőponttal esik össze.

7. Ha mind a' három ösztevőnek az (1) egyenletben véges értéke van, akkor lesz:

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} l = -\frac{A}{B}w - \frac{C}{B} \text{ és} \\ w = -\frac{B}{A}l - \frac{C}{A} \end{array}\right\}$$

Ezen két egyenlet az ösztevők' jegyeire nézve 4 különböző formát nyer:

α) Legyen A és B-nek, és egyszersmind A és C-nek is ellenkező jegye, ezen esetben lesz:

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} l = \frac{A}{B}w - \frac{C}{B} \\ w = \frac{B}{A}l + \frac{C}{A} \end{array}\right\}$$

Ha $l = o$, lesz,

$$w = \frac{C}{A};$$

t. i. a' kezdőpontban levő irány, az elsőiránynyal a' szöget $= < \frac{C}{A}$ képzi. Ha (26. kép) a' kezdőpont *a*, ab' az első irány, és (26. kép)

$$< b'ab = < \frac{C}{A},$$

akkor ab lesz a' kezdőpontban levő irány. Ha $w = o$ lesz:

$$l = -\frac{C}{B};$$

t. i. a' görbének első iránypontja a' kezdő ponttól $\frac{C}{B}$ távolságra esik c pont felé. Ha $ac = \frac{C}{B}$, akkor a' körnek c pontjában első iránya lesz, melly közegyenes az ab' irányhoz. *A' kezdő pont és első irány tehát két külön pontra esik.*

A' (4) egyenletnek ismét *egy kör felel* meg, mivel a' kezdőponttól *a*, 's abban levő *ab* iránytól, a' haladás mindig egyenes arányban áll a' forgással. Ezen állításnak úgy léte onnan is kitetszik, mivel, ha az első irány a' kezdőpontra mozdítatik el, megint a' (2) egyenletre akadunk. Ha t. i. $l = o$, akkor lesz (4) alatti egyenlet szerint:

$$w = \frac{C}{A},$$

's ha most w helyett, $w' + \frac{C}{A}$, iratik lesz (4) szerint:

$$w' + \frac{C}{A} = \frac{B}{A}\, l + \frac{C}{A}, \text{ vagy}$$

$$w' = \frac{B}{A}\, l \ldots\ldots (\alpha)$$

$$\text{és } l = \frac{A}{B}\, w' + \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{A} - \frac{C}{B}, \text{ vagy}$$

$$l = \frac{A}{B}\, w \ldots\ldots (\beta)$$

Az (α) és (β) egyenletnek és a' (2) egyenletnek egyenlő alakja van; azért a' (4) egyenletnek is a' kör felel meg.

Itt a' kezdőponton keresztül húzott első-irány a'ab' egy vágó (secante), mellyre nézve a' kezdőpont' érintője *ab* igenlegesen fekszik. A' kör az *ab* érintőnek jobb oldalán van.

β) Ha A és B-nek ellenkező, A és C-nek pedig egynemü jegyei vannak, akkor lesz:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} l = \frac{A}{B}\, w + \frac{C}{B} \\ w = \frac{B}{A}\, l - \frac{C}{A} \end{array} \right\}$$

Ezen egyenletnek megfelelő görbe ismét a' kör, mellynek kezdőpontján keresztül húzott első iránya megint egy vágó, mellyre nézve a' kezdőpont' érintője *ab* nemlegesen fekszik. A'
(27. kép) kör az *ab* érintőnek jobb óldalán van (27. kép).

γ) A és B-nek egynemű, A és *C*-nek ellenkező jegyei vannak; ezen esetben lesz:

$$(6)\ \begin{cases} l = -\dfrac{A}{B}w + \dfrac{C}{B} \\ w = -\dfrac{B}{A}l + \dfrac{C}{A}. \end{cases}$$

Ezen körnél a' kezdőponton keresztül húzott első irány ismét egy vágó, mellyre nézve a' kezdőpont' érintője igenlegesen fekszik. A' kör az *ab* érintőnek bal óldalán van (28. kép). (28. kép)

δ) Ha A és B-nek és egyszersmind A és C-nek is egynemű jegyei vannak, akkor a' (3) egyenlet változatlan maradván, lesz:

$$(3)\ \begin{cases} l = -\dfrac{A}{B}w - \dfrac{C}{B} \\ w = -\dfrac{B}{A}l - \dfrac{C}{A} \end{cases}$$

Ezen körnél is a' kezdőponton keresztül húzott első irány egy vágó, mellyre nézve a' kezdőpont' érintője *ab* nemlegesen fekszik. A' kör az *ab* érintőnek bal óldalán van (29. kép). (29. kép)

§. 35.

Az eddigi vizsgálásokból következik, hogy az általános első rendü egyenlet:

a) a' kezdőpontot

b) az első irányt

c) az egyenes vonalt,

d) az egyenlapú szöget, 's végtére:

e) a' kört minden lehető helyzeteivel foglalja magában.

II. FEJEZET.

Második rendü görbék.

Előleges magyarázatok.

§. 36.

Másod rendü görbék' vizsgálatánál a' következők jőnek tekintetbe:

A) A' görbének folyama általánoson véve (Lauf im Allgemeinen).

B) Átmenőpontok.

C) Görbülés' foka (Krümmungs-Staerke).

D) Legnagyobb és legkisebb görbülés' pontjai.

E) Hasonlatosság (Aehnlichkeit).

F) A' görbének önbefödése, önki- vagy bezárása. (Selbstbedeckung, Selbstaus- oder einschliessung)

G) A' görbének önkimérése (Selbstausmessung)

Az első és második pont *A* és *B* már (32, 33 §.) előadatott; F és H, egyes görbéknél, példa által fog magyaráztatni; a' mi pedig C, D és E pontokat illeti, azok a' következő §-okban bővebben fejtetnek ki.

§. 37.

C. Görbülés' foka.

Valamelly görbének *görbülése* alatt értetik a' haladással összekötött forgás; a' *forgás* alatt pedig folytonos változása az iránynak, melly tehát haladás nélkül is képzelhető. Ha valamelly görbénél bizonyos hosszára *ab* nézve (30. kép) az irányváltozás $< \beta$ nagyobb, (30. kép) mint egyenlő hosszára *bc* nézve az irányváltozás $< \alpha$, ha t. i.

$$ab = bc, \text{ és}$$

$$< \beta > < \alpha:$$

akkor az *ab* darabnak nagyobb *görbülése* lesz, mint a' bc darabnak. Magának az *ab* darabnak ismét különböző görbülése lehet; mert

$$\text{ha } qt = ta \text{ és}$$

$$< \delta > < \varepsilon:$$

akkor a' *ta* darabnak nagyobb görbülése van mint *bt*-nek; egy szóval, a' görbének legkisebb részecskéi is különböző görbülést bírhatnak, miből következik, hogy a' *görbülés' foka* csak egyes pontokban határozható.

Ha valamelly görbének egyenlete adatott, akkor a' törvény is tudva van, miképen függ a' kezdőponttól vett *ab* darabra (30. kép) nézve (30. kép) az *l* haladás, a' w forgástól. Hogy ezen törvény a' *bc* darabra nézve is határoztathassék, legyen az adott egyenlet p. o.

$$(1)\quad l^2 = w$$

Ha az *l* haladás, valamelly $\triangle$ l értékével nő, akkor a' w forgás is valamelly $\triangle$ w értekkel növekedik. Ha az adott (1) egyenletben *l* helyett $l + \triangle l$, és w helyett $w + \triangle w$ irunk 's az eredendő egyenletből az (1) egyenletet vonjuk le, akkor a' kivántatott törvény meg lesz határozva; a' szerint lesz:

$$\begin{array}{r} (l + \triangle l)^2 = w + \triangle w \\ l^2 = w \\ \hline 2l \triangle l + \triangle l^2 = \triangle w \text{ és abból} \\ 2l + \triangle l = \dfrac{\triangle w}{\triangle l} \end{array}$$

Minél kisebbnek vétetik $\triangle$ l, annál közelebb esik $\dfrac{\triangle w}{\triangle l}$ az értekhez $= 2l$. Ha $\triangle l$'s egyszersmind $\triangle$ w végetlen kicsinynek vétetik, akkor $\triangle l$, és $\triangle$ w helyett irunk dl és dw, és lesz:

$$(2) \ldots\ldots\ 2l = \frac{dw}{dl}$$

melly az adott egyenletnek *külzeléki egyenlete*. Valamint ezen (2) egyenlet, úgy általánosan valamelly görbének külzeléki egyenlete a' függvényt képzi, melly egy végetlen kis ívre nézve a' haladás és forgás közt áll. Ha a' $\triangle l$ haladásnak, a' $\triangle w$ forgás felel meg, akkor a' haladás' *egységének* felel meg a' forgás $\dfrac{\triangle w}{\triangle l}$, melly forgás az $\triangle l$ íven, egyenlően felosztottnak vétetik. Ha p. o. az ívnek $\triangle l = 7$ a' forgás $\triangle w = 21°$ felel meg, akkor lesz $\frac{\triangle w}{\triangle l} = \frac{21}{7} = 3°$, t. i. az ívnek 7, két végpontja közt olly nagy a' forgása, hogy az ívre $= 1$, a' forgás egyremásra $= 3°$ jön.

Ha $\triangle l$ és $\triangle w$ végetlen kicsinynek vétetik, akkor már határzott görbülésnek fokáról szólhatunk, mivel akkor is, dl és dw közt, véges arány lehető, a' mint az egyenlet $\frac{dw}{dl} = 2l$ mutatja. A' külzeléki hányas $\frac{dw}{dl} = 2l = c$ azt fejezi ki, hogy a' görbének azon pontjában, mellyre nézve a' külzeléki hányas c meghatároztatott, épen olly nagy görbülése van, mint egy körívnek $= 1$, mellynek forgása $= \frac{dw}{dl} = c$.

A' megfordított külzeléki hányas $\frac{dl}{dw}$ olly ívnek hosszát adja, mellynek egyenlően felosztott forgása $= 1$, vagyis egyenlő a' forgás egységével.

Mivel egyenlő köríveknél $= 1$ a' görbülés' foka, úgy változik, mint a' külzeléki hányas c; azért lesz ha k a' görbülés' fokát jelenti,

$$c = k$$

Ezen alak szerint a' görbének minden pontjában a' görbülés' foka határozható, ha l és w-nek határzott érték adatik. Az egyenlet:

$c = k$ görbülés' egyenletének neveztetik. Az adott példában lesz: (Krümmungsgleichung)

$$c = k = 2l.$$

A' görbülés' foka a' w forgás által kifejezve: lesz, mivel $l = \pm 2\sqrt{w}$

$$k = \pm 2\sqrt{w}.$$

Ha két pont közti görbülés' aránya kivántatnék, akkor a' külzeléki egyenletet mind a' két pontra nézve határozván meg, következő két egyenlet ered:

$$k = c \text{ és}$$
$$k' = c'$$

tehát $k : k' = c : c'$, melly a' görbülés' aránya.

Az adott példában:

$$k = 2l$$
$$k' = 2l', \text{ tehát}$$
$$k : k' = 2l : 2l' = l : l'.$$

t. i. a' görbülés' foka ezen görbénél egyenes arányban áll az ív' hosszával, vagyis a' haladással.

A $c = k$ egyenlet által egy körív fejeztetik ki, mellynek határzott görbülési foka van, 's az ezen ívnek megfelő kör, görbülés' körének neveztetik (Krümmungskreis). Ezen kőrnek egyenlete:

$$AL = W, \text{ mellyből}$$
$$\frac{W}{L} = A.$$

t. i. a' haladás' egységének forgása. $= A$. És azért lesz:

$$A = c,$$

tehát a' görbülés' köre lesz:

$$cL = W, \ldots\ldots (\alpha)$$

hol L és W-nek ugyanazon egységei vannak, mint az adott egyenletben l és w-nek.

Az adott példában: $l^2 = w$, a' görbülés' köre lesz, mivel $c = 2l$

$$(2l)\ L = W$$

Ha p. o. $l = 10$, lesz azon pontra nézve:

$$2.\ 10\ L = W \text{ vagyis}$$
$$20\ L = W.$$

A' megfordított hányas $\frac{L}{W}$ azt mutatja, hogy a' haladásnak hány egysége esik a' forgás' egységére. Azoknak száma a' kör' nagyságával egyenes arányban áll.

Az (α) egyenletből következik:

$$\frac{L}{W} = \frac{1}{c},$$

melly alakból hivehető, hogy $\frac{L}{W}$ értéke azon arányban fogy, mellyben c növekedik; vagy más szóval: a' görbülés' körei és azoknak félátmérői is úgy vannak egymáshoz, mint megfordítva a' görbülés' fokai. A' forgás' egysége annyiszor találtatik 360°-ban, mint ezen egységnek megfelelő ív' hossza a' kör' kerületében. A' görbülés' körének ezen ív' hossza $= \frac{1}{c}$; a' kör' kerülete legyen $= U$; tovább azon szám, melly mutatja, hányszor foglaltatik a' forgás' egysége 360°-ban, legyen $=$ n, és lesz:

$$U = n. \frac{1}{c} = \frac{n}{c}$$

és mivel: $U = 2\,R\,\pi$, lesz:

$$R = \frac{U}{2\pi}, \text{ vagy}$$

$$R = \frac{n}{2\pi c} \quad \ldots\ldots (\beta)$$

legyen példánkban a' forgás' egysége = 30', akkor lesz:

$$n = \frac{360}{30} = 12, \text{ tehát}$$

$$R = \frac{12}{2\pi c} = \frac{12}{2\pi . 2l} = \frac{3}{\pi l};$$

ha l = 6, lesz azon pontra nézve:

$$R = \frac{3}{6\pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

A' (β) egyenletből következik:

$$c = \frac{n}{2\pi R}, \text{ és abból, mivel}$$

c = F (l), azon pont található, mellyre nézve a' görbülés' köre határoztatott meg.

Az adott példában van:

$$c = 2l, \text{ tehát:}$$

$$2l = \frac{12}{2\pi R}, \text{ 's mivel}$$

$$R = \frac{1}{2\pi} \text{ találtatott, lesz:}$$

$$l = \frac{12 . 2\pi}{4\pi} = 6, \text{ mi a' tett fölvétellel}$$

l = 6 megegyez.

Például szolgáljon még az uj rendszerre vitetett kúpvonal' egyenlete, melly következő:

$$l = \frac{p}{4}\left[\frac{\text{tang w}}{\text{Cos w}} + \text{log. nat. tang.} (45° + \tfrac{1}{2}\,\text{w}).\right.$$

Külzelés által lesz:

$$dl = \frac{p}{2}\,\frac{dw}{\text{Cos}\,w^3}, \text{ 's abból következik:}$$

$$\frac{dw}{dl} = \frac{2}{p}\,\text{Cos}\,w^3 = k.$$

tehát lesz:

$$k : k' = \text{Cos}w^3 : \text{Cos}w'^3$$

t. i. a' görbülés' fokai, úgy vannak egymáshoz, mint a' pótkeblek' köbei (Cosinus) mellyek a' megfelelő forgás' szögeihez tartoznak.

§. 38.

D. Legnagyobb és lekisebb görbülés' pontjai.

A' 37-dik §-ban leszármaztatott görbülés' egyenlete szerint könnyü lesz a' legnagyobb és legkisebb görbülés' pontjait feltalálni, az által t. i. ha a' közönséges mód szerint azon értékek kerestetnek föl az egyenletből, mellyekre nézve *k* maximum vagy minimum lesz.

§. 36.

E. Föltételek az egyenlapú görbék' hasonlatosságára nézve.

Az egyenlapú görbék hasonlók, ha görbüléseiknek fokai hasonlóan fekvő pontjaikban egyenlők. Hasonlóan fekvő pontok neveztetnek, mellyekben a' kezdőponttól számlált forgás' nagysága valamennyiben ugyanaz. Ezen pontokra nézve következő esetek vannak:

1) Lehet, hogy a' hasonlóan fekvő pontok' meghatározásánál a' görbülés' aránya az egyik görbénél, w és w' által, a' másodiknál W és W' által 'stb ki van fejezve. A' forgás' egységének nagysága vagy egyenlő, vagy nem; első esetben lesz:

$$w = W$$
$$w' = W',$$

a' másodikban:

$$nw = W$$
$$nw' = W'$$

mind a' két esetben W és W' helyett értékeik ($w \cdot w'$, vagy nw, nw') tétetnek az arányba, és vizsgáltatik vajjon helyes-e ezen arány? p. o. a' kúpvonal görbülés' aránya volt $\text{Cos } w^3 : \text{Cos } w'^3$.

Legyenek más kúpvonalnak hasonlóan fekvő pontjai W és W'; akkor a' hasonlatosság' föltétele lesz:

$$\text{Cos } w^3 : \text{Cos } w'^3 = \text{Coz } W^3 : \text{Cos } W'^3, \text{ vady:}$$
$$\text{Cos } w ; \text{Cos } w' = \text{Cos } W : \text{Cos } W' \; \ldots\ldots \; (\alpha)$$

Ha a' forgás' egysége mind a' kettőnél egyenlő, akkor lesz:

$$w = W, \text{ és } w' = W'$$

tehát az egyarány (α) helyes.

Ha ezen egységek különbözők, akkor lesz:

$$\text{Cos } W : \text{Cos } W' = \text{Cos } nw : \text{Cos } nw'.$$

Ha p. o. $w = 2$, $w' = 3$, 's a' forgás' egysége $= 5°$; W és W'-nek pedig feleljen meg az egység $= 1°$, akkor lesz:

$$W = nw = 5 . 2 = 10.$$

és $W' = nw' = 5 . 3 = 15$

tehát

$$\text{Cos } 2 : \text{Cos } 3 = \text{Cos } 10 . \text{Cos } 15,$$

de, mivel az első két tagban az egység $= 5$, a' másodikban $= 1$, azért lesz:

$$\text{Cos } 2 . 5 : \text{Cos } 3 . 5 = \text{Cos } 1 . 10 : \text{Cos } 1 . 15$$

vagyis: $\text{Cos } 10 : \text{Cos } 15 = \text{Cos } 10 : \text{Cos } 15$

's mivel ezen egyarány helyes, azért a' kúpvonalok hasonlók.

2. Ha a' görbülés' aránya l és l', L és L' által, adatnék, vagyis az egyarány $l : l' = L : L'$ adva volna, hol l és L, l' és L' hasonlóan fekvő pontoknak haladásai, és w, W, w' W', azoknak megfelelő forgásai; akkor határoztassék L és L', w és W' által; és mivel:

vagy $w = W$; és $w' = W'$

vagy $W = nw$, és $W' = nw'$,

azért, a' W és W' forgás határozható w, és w' által; ezen végsőt pedig l és l' által fejezvén ki, egyszersmind L és L' lesz l és l' által meghatározva. Ezen talált értékek, L és L' helyett tétetnek az arányba, 's vizsgáltatik: vajjon helyes-e az arány vagy nem?

3) l és l', L és L' helyett, a' megfelelő forgások w, w', W W' által meghatárzott értékeik tétessenek a' görbülés' arányába és vizsgáltassék 1-ső szám szerint, vajjon helyes-e az arány vagy nem?

§. 40.

Az eddigi vizsgálatoknak például szolgáljon a' kör' egyenletének, legegyszerübb alakja, melly 34 § szerint:

(1) w = al,

hol az állandó mennyiség *a* igenlegesnek vétetik.

A. A' görbének folyama általánosan véve.

1. Ha l = o, lesz egyszersmind w = o; t. i. a' görbének első iránya a' kezdőpontban
(31. kép) van (31. kép) *a* és *ab*.

2. Minden igenleges haladásnak *l* igenleges forgás w felel meg; azaz egyik ága a' körnek a' kezdőponttól igenlegesen halad igenle-
(31. kép) ges forgással (31. kép) ac.

3. Minden nemleges haladásnak *l* nemleges forgás w felel meg; t. i. a' másik ága a' körnek a' kezdőponttol nemlegesen halad nem-
(31. kép) leges forgással (31. kép) ac'.

4. Egyenlő értékü igenleges és nemleges haladásoknak l, egyenlő értékü, igenleges és nemleges forgások w, felelnek meg; azért ezen két ág *azonos* (identisch).

5. Ha a' haladás l nő, akkor a' forgás w is nevekedik, és ha l = ∞, lesz egyszersmind w = ∞

B. Átmenő pontok.

1. A' kezdőponttól fogva ellenkező irányú haladások és forgások lehetők; azért a' kezdőpont a' görbének egy *közönséges* pontja (33-d. § 1, és 1').

2. A' kezdőponttól valamint az igenleges vagy nemleges haladások, úgy a' forgások is egynemüek; azért a' görbének többi pontjai is *közönségesek*. A' körrnek tehát nincs átmenőpontja. (33. §. 2 és 2').

C. Görbülés' foka.

Külzelés által lesz az (1) egyenletből:

$$\frac{dw}{dl} = a\text{, vagy, mivel a' görbülés' foka h} =$$

$$\frac{dw}{dl}\text{, lesz}$$

$$k = a$$

melly alakból kivehető, hogy a' görbülés' foka *k* a' körnek minden pontjában ugyanaz.

D. Legnagyobb és legkisebb görbülés' pontjai.

Mivel a' kör' minden pontjában a' görbülés' foka egyenlő, azért mondhatjuk: hogy a' legnagyobb és legkisebb görbülés' pontjai a' kör' kerületén mindenütt és sehol sem léteznek.

E. Görbülés' aránya és hasonlatosság.

A' kör' minden pontjára nézve van:

$$k = a\text{, tehát}$$

$$k : k' = 1 : 1$$

melly egyarányból következik, hogy minden körök hasonlók. A' mi nagyságait illeti, ezek a' haladás és forgás közti egység' arányától függnek. Minél kisebb t. i. a' forgás ugyanazon haladásra nézve, vagy minél nagyobb a' haladás ugyanazon forgásra nézve, annál nagyobb a' kör.

A' kör' nagysága azon kivül még az ösztevőtől a függ, és mivel a' görbülés' foka $k = a$, azért a' kör annál nagyobb lesz, minél kisebb az állandó ösztevő $= a$.

F. Önbefödés.

A' kör' (1) egyenlete nem változik, ha a' kezdőpont és első irány valamelly más pontjába tétetnek által. Mert ha a' kezdőpont p. o. *b* távolságra mozdítatik el, akkor lesz ezen értékre nézve

$$w = ab,$$

ha tehát $l' = l + b$, és $w' = w + ab$, mellyből következik:

$$l = l' - b,$$
$$w = w' - ab$$

akkor az (1) egyenletben lesz:

$$w' - ab = a(l' - b), \text{ vagyis}$$
$$w' = al'$$

Ha a' kezdőpont b távolságra ellenkező irányban mozdítatik el, akkor lesz:

$$l = l' + b \text{ és}$$
$$w = w' + ab, \text{azért ismét:}$$
$$w' = al'.$$

Ezen tulajdonságnál fogva a' körnek akármelly darabja azonos egy más ugyanolly hosszú darabjával; az első fordúlás azonos a' másodikkal és minden következővel. Azért egy fordulása másikát tökéletesen födi, és a' kör magába visszatérő vonal.

G. Önkimérés.

Ha valamelly adott forgásnak w', a' haladás l' felel meg, mellynek hossza megkivántatik, és más pontra nézve a' haladás l és a' megfelelő forgás w adva van, akkor lesz a' két egyenletből:

$$w' - al' \text{ és}$$

$$w = al$$

$$w : w' = al : al' = l : l' \text{ és abból:}$$

$$l' = \frac{w'.\, l}{w},$$

ha w' ismeretlennek vétetik, lesz:

$$w' = \frac{w.\, l'}{l}$$

Jegyzés. A' kör' domborúsága és homorúsága (Convexitaet und Concavitaet) mindig a' belső oldalán marad.

§. 41.

Általános második rendü egyenlet két változóval.

Ezen egyenletnek következő alakja van:

$$(1)\quad Aw^2 + Bwl + Cl^2 + Dw + El + F = o$$

és abból:

$$(2)\quad w = \frac{Bl + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{\left[(B^2-4AC)l^2+2(BD-2AE)l+(D^2-4AF)\right]}$$

$$(3)\quad l = \frac{Bw + E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{\left[(B^2-4AC)w^2+2(BE-2CD)w+(E^2-4CF)\right]}$$

A' (2) és (3) egyenletben az általános ösztevőknek nem csak minden lehető igenleges vagy nemleges értékek adatbatnak, hanem (kivéve A és C ösztevőket) $=$ o is lehetnek. Ha t. i. A és C, vagy csak egyik is $=$ o, akkor *w* és *l*, vagy azoknak egyike végetlen nagygyá, vagy is határozatlanná válik. Ezen föltétel alatt, tehát a' függvény (1) nem használható előbb történt változtatás nélkül.

§. 42.

Ha tehát az (1) egyenletben

$$A = o \text{ és}$$
$$B = o,$$

C pedig véges értékü, akkor lesz:

$$(4)\quad Cl^2 + Dw + El + F = o$$

Ezen egyenletnek taglalása.

1. Ha $D = o$, $E = o$ és $F = o$, akkor marad:

$$Cl^2 = o\text{, vagy}$$
$$l = o$$

vagyis a' kezdőpont.

2. Ha $D = o$ és $E = o$; vagy $D = o$ és $F = o$, akkor az egyenletnek egyenes vonal felel meg. Ha az első esetben az ösztevő F és C jegyei egynemüek, akkor ezen egyenes lehetetlen.

3. Ha $E = o$, és $F = o$, lesz:

$$Cl^2 + Dw = o \text{ és abból.}$$

$$(5)\quad w = -\frac{C}{D}\, l^2\text{, és}$$

$$(6)\quad l = \pm\sqrt{-\frac{D}{C}\, w}$$

Ha C és D-nek ellenkező jegyei vannak, akkor lesz:

$$(7)\quad w = \frac{C}{D}\, l^2 \text{ és}$$

$$(8)\quad l = \pm\sqrt{\frac{D}{C}\, w}$$

α) Ha $l = o$, lesz egyszersmind $w = o$. t. i. a' görbének első iránya a' kezdőpontban van.

β) Minden igenleges vagy nemleges haladásnak l csak egy igenleges értéke a' forgásnak w felel meg (7 szerint); azért a' görbének két ellenkező irányban haladó ága van, igenleges forgással (32. kép) a c e, és a d e'. (32. kép)

ε) Ezen két ág azonos, mivel két egyenlő haladásnak, mellynek egyike igenleges, másika pedig nemleges, a' forgásnak csak egy értéke felel meg. Ha $l = \infty$, lesz egyszersmind $w = \infty$, t. i. ezen két ág végetlen haladással, végnélkül forog.

δ) Csak ezen két ág lehető, mert (8) alatti egyenlet szerint nemleges forgás w ád lehetetlen haladást.

A' (5) és (6) két egyenlet ugyanazon görbét foglal magában; a' nemleges állandó miatt
(32. kép) annak helyzete a c' d'. (32. kép).

4. Ha D = o, lesz

$$(9) \quad l = -\frac{E}{2C} \pm \sqrt{\frac{E^2 - 4FC}{4C^2}}$$

t. i. két egyenesnek egyenlete, vagy ha $4FC'$ igenleges, és $> E^2$, akkor két lehetetlen egyenest foglal magában.

5. Ha E = o, lesz;

$$(10) \quad w = -\frac{C}{D} l^2 - \frac{F}{D}, \text{ és}$$

$$(11) \quad l = \pm\sqrt{-\frac{D}{C} w - \frac{F}{C}}$$

Ha a' (10) egyenletben C és D, F és D-nek jegyei ellenkezők, akkor van:

$$(12) \quad w = \frac{C}{D} l^2 + \frac{F}{D}$$

Ha $l = o$, lesz $w = \frac{F}{D}$, t. i. a' kezdőpontban levő irány az első iránynyal képzi a' szöget $< \frac{F}{D}$. Egyébiránt a' (7) és (12) egyenletnek ugyanazon görbe felel meg; mert ha a' (13) alatti egyenletben w helyett $w + \frac{F}{D}$ iratik, lesz:

$$w + \frac{F}{D} = \frac{C}{D} l^2 + \frac{F}{D} \text{ vagy}$$

$$w = \frac{C}{D} l^2,$$ melly ismét a' (8) alatti egyenlet.

Valamint a' körnek, úgy ezen görbének is 6 külön helyzete lehet, a' mint az (5), (7) és (10) egyenletekből kivehető.

6. Ha a' (4) egyenletben $F = o$, C és D, E és D jegyei pedig ellenkezők; lesz:

$$(13)\quad w = \frac{Cl^2 + El}{D} \text{ és}$$

$$(14)\quad l = \frac{-E \pm \sqrt{4CDw + E^2}}{2C}.$$

Ha $l = o$, lesz egyszersmind $w = o$; t. i. az első irány a' kezdőpontban van. Minden igenleges *l* haladás ád igenleges *w* forgást, és ha az igenleges haladás nő, akkor w is növekedik, míg végtére ha $l + \infty$, egyszersmind $w = \infty$. Az igenleges ág tehát végetlen haladással, végetlenűl forog (32. kép cef), feltéve, hogy *c* (32. kép) a' kezdőpont és con az elsőirány. Ha *l* nemleges, w is nemleges lesz eleintén, ezen nemleges *w* forgás nő nemleges haladásokra nézve addig, míg maximummá lesz; ezentúl pedig fogy, mig $=$ o-vá válik, azután igenleges forgásba megy által, és abban *w* nő, mig végtére $= \infty$. Hogy a' nemleges *l* haladásnak azon értékeit találhassuk, mellyekre nézve a' w forgás maximum, szükség lesz a' mennyiséget $Cl^2 + El$ tekintetbe venni; mert ha $Cl^2 + El$ értéke maximum, akkor w értéke is legnagyobb lesz. Ha tehát ezen maximum $= M$, lesz:

$$Cl^2 + El = M, \text{ és abból}$$

$$(\alpha) \ldots l = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 + 4CM}}{2C},$$

M értéke legnagyobb, ha általánosan:

$$M = \pm \infty,$$

itt csak $+\infty$ használható, és azért lesz

$$l = \pm \infty;$$

mivel az *l* haladás nemlegesnek tétetik föl, azért vétessék az alsó érték:

$$l = -\infty;$$

ezen értékre nézve az igenleges w forgás maximum, mivel $M = +\infty$ vétetett.

A' forgásnak nemleges maximumára nézve tétessék (α)-ban:

$$E^2 + 4CM = o, \text{ és abból lesz:}$$

$$M = -\frac{E^2}{4C}$$

ezen érték (α)-ba téve;

$$l = -\frac{E}{2C};$$

ha tehát $l = -\frac{E}{2C}$, akkor a' nemleges forgás maximumát éri el.

Hogy a' nemleges l haladásnak még azon értékeit találhassuk, mellyekre nézve a' nemleges forgás minimum $= m$, szükséges lesz a' következő egyenletet feltenni:

$$Cl^2 + El = m$$

és abból:

$$l = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 + 4Cm}}{2C}.$$

m-nek legkisebb értéke:

$$m = o \text{ és azért:}$$

$$l = \frac{-E \pm E}{2C}, \text{ tehát}$$

vagy $l = o$

vagy $l = -\frac{E}{C}$.

Ezen vizsgálatokból kivehető, hogy a' (13) alatti egyenletben a' kezdőponttól:

$$l = e \text{ kezdve}$$

a' nemleges haladásig:

$l = -\frac{E}{2C}$ a' w forgás nemlegesen nő; innen a' haladásnak értékeig $l = -\frac{E}{C}$ a' nemleges forgás mindig fogy, 's *l*-nek ezen értéke mellett: $w = o$; innentúl minden nagyobb nemleges haladásra nézve a' forgás igenlegesen nő és vég nélkül.

Ha (32. kép) $ca = l = -\frac{E}{2C}$, és (32. kép)

$$cd = l = -\frac{E}{C},$$

akkor az *a* pont egy *fordúlatpont*, mivel *c*-től *a*-ig a' nemleges forgás nő, *a*-tól pedig fogy; *d* pontban ismét a' görbének első iránya van, mivel abban w = o.

Ezen *d* ponttól fogva a' forgás igenleges.

Mivel a' két pont *c* és *d*, mellyben a' görbének első iránya van, a' fordulat' pontjától egyenlő távolságra esnek; azért gyanitható, hogy az *a* ponttól kezdve a' görbének két azonos ága van. Annak megvizsgálatára tétessék a' kezdőpont *c*, *a* pontra; mivel

$$ca = -\frac{E}{2C},$$

lesz, ha ezen érték a' (13) egyenletbe tétetik:

$$w = -\frac{E^2}{4CD}.$$

Ha tehát l helyett $l - \frac{E}{2C}$, iratik

és w helyett $l\,w - \frac{E^2}{4CD}$, akkor

lesz a' (13) és (14) alatti egyenletben:

$$(15) \ldots w = \frac{C}{D} l^2 \text{ és}$$

$$(16) \ldots l = \pm \sqrt{\frac{D}{C} w}.$$

Melly két egyenlet ugyanazon már ismeretes görbének felel meg, tehát a' (13) és (14) alatti is csak ezen görbét foglalja magában. Ezen két egyenletből kivehető, hogy a' két ág azonos.

(13) és (14) szerint, az ösztevők' jegyeire nézve a' görbének itt is több helyzetei vannak.

7. Ha a' (4) egyenletben mind a' 4 ösztevő véges értékü, akkor lesz:

$$Cl^2 + Dw + El + F = o, \text{ és abból:}$$

$$(17)\ w = \frac{-Cl^2 - El - F}{D},$$

$$(18)\ l = \frac{-E \pm \sqrt{4CDw + E^2 - 4CF}}{2C.}$$

a' (18) alatti egyenletben C és D, E és D' jegyei ellenkezők. Ezen két egyenletnek is ugyanazon már eddig leszármaztatott görbe felel meg.

Mivel pedig, ha $l = o$,

$$w = -\frac{F}{D},$$

azért az első irány' pontja a' kezdőponttal nem esik össze.

Az eddigi vizsgálatokból következik, hogy az általános egyenletnek:

$$Cl^2 + Dw + El + F = o$$

csak egy görbe felel meg, 's annak legegyszerűbb alakja:

$$w = \frac{C}{D} l^2, \text{ vagy, ha rövidség' okáért } \frac{C}{D} = a,$$

lesz:

$$w = al^2$$

Krause úr ezen görbét „*parabola originaria longitudinaris*"*nak* nevezi.

§. 43.

A' $w = al^2$ egyenletnek taglalása.

A. A' görbének folyama általánosan véve.

A' görbének a' kezdőponttól két, ellenkező irányban elterjedő, végetlen hosszú, azonos ága van, mind a' kettő igenleges 's végetlen forgással.

B. Átmenőpontok.

A' kezdőpont egy fordúlatpont, a' görbének többi pontjai mind közönségesek (33-dik § szerint).

C. Görbülés' foka.

Külzelés által van:

$$dw = 2aldl, \text{ és abból}$$

$$\frac{dw}{dl} = 2al = k.$$

D. A' legnagyobb és legkisebb görbülés' pontjai.

A' legkisebb görbülés' pontja a' kezdőpont *a*, mivel, ha a' görbülés' egyenletében $l = o$, egyszersmind $k = o$, vagyis a' görbülés $= o$. Ha $l = \pm \infty$, akkor lesz $k = \pm \infty$,

t. i. a' legnagyobb görbülés' két pontja fekszik a' kezdőponttól két ellenkező irányban végetlen távolságra, vagyis a' görbe mindig a' legnagyobb görbülés' pontjaihoz közelget, a' nélkül, hogy azokat valaha elérné.

E. Görbülés' aránya 's hasonlatósság.

Az arány:

$k : k' = 2al ; 2al' = l : l'$ azt mutatja, hogy a' görbülés' fokai úgy vannak egymáshoz, mint a' megfelelő haladások, vagy

$$\text{mivel } l = \pm\sqrt{\frac{w}{a}},\ l' = \pm\sqrt{\frac{w'}{a}},$$

ugymint a' forgások' négyszög gyökerei is. Azon görbének más példájára nézve van,

$$W = AL^2$$

annál is a' görbülés' aránya

$$L : L',$$

tehát hasonlóan fekvőpontokra nézve:

$$l : l' = L : L',\ \text{vagy}$$

$$\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{a}} : \frac{\sqrt{w'}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{W}}{\sqrt{A}} : \frac{\sqrt{W'}}{\sqrt{A}},\ \text{és abból}$$

$w : w' = W : W'$, és ha a' forgás' egysége különböző, lesz

$$W = nw,\ W' = nw,\ \text{tehát}$$

$$w : w' = nw : nw',\ \text{vagyis}$$

$$w : w' = w : w'$$

ezen egyarány helyes, tehát a' görbének alakja nem változik, 's csak egy görbülés' módja van. Ezen görbék' egymás közti különbsége tehát csak nagyságait illeti.

F. Önkizárás.

A' mondottakból látható, hogy a' görbének két ága mindig jobban hajol be, 's hogy minden következő fordúlás az előbbit zárja ki. Ezen görbe tehát a' kettős befele tekert tekervényekhez tartozik (Doppel-Spiralen).

G. Önkimérés.

Az egyarányból

$l : l' = \sqrt{w} : \sqrt{w'}$, és

$w : w' = l^2 : l'^2$, következik, hogy az ív' hosszai úgy vannak egymáshoz, mint a' forgások' négyszög gyökerei, vagy megfordítva, a' forgások úgy állanak egymáshoz, mint másod fokai az ív' hosszainak.

Jegyzés. A' két ág' homorusága a' görbének belső oldalán van, 's a' fordúlatpontban másik oldalára megy által.

§. 44.

A' görbének $w = al^2$ váltógörbéje (Wechselkrumme).

Váltógörbéknek neveztetnek azok, mellyeknek egyikénél a' haladás épen úgy függ a' forgástól, mint másikuknál a' forgás a' haladástól.

A' szerint tehát:

$$Al = \frac{B \log w}{w}, \text{ és } Aw = \frac{B \log l}{l}$$

váltógörbéknek két egyenlete.

A' $w = al^2$ vonalnak váltógörbéje tehát

(1) $l = aw^2$, és abból

$$w = \pm \sqrt{\frac{l}{a}}.$$

§. 45.

A' görbének: $l = aw^2$ taglalása.

A. A' görbének folyama általánosan véve.

1. A' görbének első iránya, a' kezdőpontban van, mivel $l = o$, ád

$w = o$. (33. kép) *a* pont. (33. kép)

2. Minden, valamint igenleges, úgy nemleges értéknek *w*, csak egy igenleges érték *l* felel meg; azért a' kezdőponttól két ág, igenleges haladással, az egyik igenleges forgással (33. kép) abc, a' másik nemleges forgással terjed. (33. kép) a b' c'. (33. kép) (33. kép)

3. Nemleges haladásokra nézve a' forgások lehetetlenek; azért a' görbének csak ezen két ága van.

4. Egyenlő igenleges és nemleges forgásoknak egyenlő haladások felelnek meg; azért a' két ág azonos.

5. Minél nagyobb a' *w* igenleges vagy nemleges értéke, annál nagyobb az *l*; és ha $w = \pm \infty$, lesz $l = \infty$; t. i. a' görbének két ága vég nélkül halad végetlen forgással.

B. Átmenőpontok.

Mivel a' haladások a' kezdőponttól csak igenlegesek, a' forgások ellenben valamint igenlegesek, úgy nemlegesek is, azért a' kezdőpont egy *csúcs* (33-dik § szerint) a' görbének többi pontjai pedig mind közönségesek.

C. Görbülés' foka.

Külzelés által van:

$$\frac{dw}{dl} = \frac{1}{2aw} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{w} = k.$$

D. Legnagyobb és legkisebb görbülés' pontjai.

1. Ha $w = o$, lesz $k = \infty$: a' legnagyobb görbülés' pontja tehát a' kezdőpontban létezik.

2. Minél nagyobb a' *w*, annál kisebb a' k, és ha $w = \infty$, *k* végetlenül kicsiny lesz. A' gőrbülés' nagysága tehát a' kezdőponttól fogva mindig fogy.

E. Görbülés' aránya, 's hasonlatosság.

A' görbülés' arányából

$$k : k' = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{w'} = w' : w$$

következik, hogy a' görbének változatlan alakja van. A' különbség ezen görbék közt tehát csak nagyságait illeti.

F. Önbezárás.

A' görbülés' módjából következik, hogy a' két ágnak minden következő fordúlása az előbbit zárja be. A' görbe tehát egy *kifelé tekert kettős tekervény*.

G. Önkimérés.

Az egyarány:

$$l : l' = aw^2 : aw'^2 = w^2 : w'^2$$

azt mutatja, hogy az ív' hosszai, vagyis a' haladások a' kezdőponttól úgy vannak egymáshoz, mint a' megfelelő forgásoknak másod fokai.

1-ső *Jegyzet*. A' homoruság mind a' két ágnál belső óldalán marad.

2-dik *Jegyzet*. Az $l = aw^2$ egyenletnek megfelelő görbét Krause úr „*parabola originaria angularis*"nak nevezi.

§. 46.

Ha az általános egyenletben:

$$Aw^2 + Bwl + Cl^2 + Dw + El + F = o.,$$

$B = o$, $E = o$, és $F = o$, továbbá: $A = C = - D = 1$; akkor lesz: $w^2 + l^2 - w = o$, és abból:

$$(1) \quad l = \pm \sqrt{w - w^2} \text{ és}$$

$$(2) \quad w = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - l^2};$$

ezen két egyenlet függőleges öszrendesekre nézve a' kör' egyenlete, feltéve, hogy a' kezdőpont az átmérőnek $= 1$ vég pontján, vagyis a' kör' kerületén van.

§. 47.

Az (1) és (2) alatti egyenletnek taglalása.

A. A' görbének folyama altalánosan véve.

1. Ha az (1) egyenletben $w = o$, lesz egyszersmind $l = o$. t. i. a' görbének első iránya a' kezdőpontban van (34. kép) *a* pont.

(34. kép)

2. Nemleges forgásra nézve lehetetlen a' haladás, igenleges forgásoknak pedig, a' haladásnak két ellenkező és azonos értéke felel meg. A' görbének tehát csak két és pedig azonos ága van; az egyik a' kezdőponttól *a* (34. kép) ab igenleges, a' másik ag nemleges; mind a'

(34. kép)

kettőnek pedig igenleges forgása van. Azért a' kezdőpont egy fordúlatpont (33-dik §).

2. A' gyökér miatt nem lehet w — w^2 értéke nemleges, azért a' föltétel

$$w - w^2 = o$$

a' forgásnak legnagyobb értékét határozza meg; 's abból van:

$$w = 1$$

tehát a' *forgás' egysége* a' kezdőponttól számítva, a' forgásoknak határa. Legyen ezen egység = 2 R.

4. A' haladásnak *l* legnagyobb értéke következik az (2) egyenletből; melly szerint a' föltétel áll:

$$\tfrac{1}{4} - l^2 = o, \text{ és abból}$$

$$l = \pm \tfrac{1}{2}.$$

Ezen értékre nézve lesz:

$$w = \tfrac{1}{2}.$$

A' haladásnak legkisebb értéke = o, és azért lesz

$$\text{vagy} \quad w = o,$$

$$\text{vagy} \quad w = 1.$$

5. Az eddigi vizsgálatokból következik, hogy w = o-tól kezdve, $w = \tfrac{1}{2}$-ig *l*-nek értéke o-tól nő, míg $l = \tfrac{1}{2}$; w-nek nagyobb értékére nézve, a' haladás *l* fogy, és ha $w = 1$, lesz l = o. Mivel tehát a' *b* pontban, mellyre nézve $l = \tfrac{1}{2}$ és $w = \tfrac{1}{2}$ a' haladás ellenkező irányba megy át, a' forgás pedig nem, azért a' *b* pont egy *csúcs*. (34. kép), (33-dik §). (34. kép)

Legyen f ezen pont, mellyre nézve

$$w = 1$$
$$l = o:$$

akkor lesz adf az igenleges ág, mellyel azonos a' nemleges agh; itt g-pontra nézve

$$l = -\tfrac{1}{2}, \text{ és}$$
$$w = \tfrac{1}{2}$$

h pontra nézve

$$l = o$$
$$w = 1.$$

A' két csúcs b és g közt a' középen létezik a' fordúlatpont *a*.

6. Ha $w > 1$, akkor a' haladás lehetetlen, 's azért f-től fogva a' w forgás megint fogy, és valamint a' haladás *b*-től f-ig fogyott, úgy innen megfordított rendben nő, addig mig $w = \tfrac{1}{2}$, melly értékre nézve ismét $l = \tfrac{1}{2} = fm$.

Ámbár a' folyam df, d-től a-ra tekintve, nemleges, mégis az egész folyam adf igenleges, 's azért f-től is, az igenleges haladásnak folytatása, egynemü marad m pontig; mivel pedig f pontban a' forgás ellenkezővé válik, azért f ismét egy fordúlatpont, úgy *m* ismét egy csúcs 'stb. Ugyanaz áll a' nemleges ágrúl aghm'. A' mondottakból következik, hogy minden két csúcs közt, a' középső pont, f, a, h.... egy fordúlatpont, 's megfordítva, minden két fordúlatpont közt a' középső pont m, b, g, m'.... egy csúcs.

A' (2) egyenletben a' haladások' kettős értéke 's a' gyökér miatt képzelhető, hogy a' görbének négy ága van; de midőn a (2) egyenlet szorosabban vizsgáltatik meg, akkor kitetszik, hogy a' görbének csak két ága van.

Ha a' kezdőpont *a* tétetik *d* pontra, vagyis a' csúcsra, akkor w helyett tétessék az (1) és (2) egyenletben $w + \frac{1}{2}$, *l* helyett pedig $l - \frac{1}{2}$, melly értéknél fogva lesz:

$$(\alpha) \ldots l = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - w^2} \text{ és}$$

$$(\beta) \ldots w = \pm \sqrt{l - l^2}.$$

Ezen két alakból következik, hogy azon vonalnak váltógörbéje önmaga a' leszármaztatott vonal.

B. Átmenőpontok.

Az eddigi vizsgálatokból látható, hogy ezen görbének vannak átmenőpontjai, t. i. a' fordúlatpont és a' csúcs, mellyeknek száma végetlen a' görbe' végetlen folyamában.

C. Görbülés' foka.

A' (β) egyenletből következik külzelés által:

$$dw = \frac{dl - 2l\,dl}{2\sqrt{l - l^2}}, \text{ vagy}$$

$$(\vartheta)\ \frac{dw}{dl} = \frac{1 - 2l}{2\sqrt{l - l^2}} = k.$$

D. Legnagyobb és legkisebb görbülés' pontjai.

Ha $k = \dfrac{1 - 2l}{2\sqrt{l - l^2}} = o$, lesz

$$1 - 2l = o\text{, és abból:}$$
$$l = \tfrac{1}{2}$$

a' legkisebb görbülés' pontja tehát a' fordúlatpont.

Ha (ε)-ban $2\sqrt{l - l^2} = o$, melly érték mellett k maximum; akkor lesz:

$$l - l^2 = o \text{ vagy}$$
$$l(1 - l) = o\text{, tehát}$$

vagy, $l = o$, vagy $l - 1 = o$, és abból
$$l = 1.$$

Mivel pedig a' pontok

$$l = o \text{ és}$$
$$l = 1$$

a' csúcs' pontjai, azért ezen görbének legnagyobb görbülés' pontjai a' csúcsok.

E. Görbűlés' aránya 's hasonlatosság.

1. A' görbülés' aránya:

$$k : k' = \frac{1 - 2l}{2\sqrt{l - l^2}} : \frac{1 - 2l'}{2\sqrt{l' - l'^2}}$$

2. Az (1) és (2) egyenletnek megfelelő görbék csak akkor hasonlók, ha azoknál a' forgás' egysége ugyanaz, ha tehát $w = W$, és $w' = W'$. A' különbség ezen görbék közt annál nagyobb, minél nagyobb a' különbség ezen egységek közt. Az egységnek $= 2R$, a' (34. kép) alatti görbe felel meg

(34. kép)

Az egységnek $= 4R$, (35. kép) (35. kép)
„ „ $= 8R$, (36. kép). (36. kép)
Az egységnek $= 8R$ megfelelő görbét (36. kép) Peters *szívlantnak* (Lyra cordis) nevezi. (36. kép)

§. 48.

Az általános egyenletből:

$$Bwl + Dw + El + F = o,$$

következik egyszerítés által:

$$(1)\ w = a\frac{1}{l};$$

ezen vonalnak váltógörbéje önmaga a' görbe, melly Krause úr után *Curva reciproca* vagyis *antilogának* neveztetik.

§. 49.

Az (1) *egyenletnek vagyis a' görbének* $w = a\frac{1}{l}$ *taglalása.*

A. A' görbének folyama általánosan véve.

1. Minden igenleges vagy nemleges haladásnak igenleges vagy nemleges forgás felel

meg. A' görbe tehát egy igenleges és egy nemleges ágból álló; mind a' két ág végnélkül terjed elő.

2. Mivel egyenlő igenleges vagy nemleges haladásnak egyenlő igenleges vagy nemleges forgás felel meg; azért ezen két ág azonos.

3. A' forgás már a' kezdőpontban végetlen nagy, mivel l = o ád w = ∞. Hol ellenben a' haladás már végetlen nagy, ott az első irány létezik, mivel w = o ád l = ∞. Az (1) egyenlet tehát azt kivánja, hogy a' haladásokat a' kezdőponttól számítván, a' forgások ezen végetlen távolságra levő ponttól számítassanak, mellyben az első irány van. A' görbe' alakításánál szükséges lesz, azt valamelly
(37. kép) felvett pontból *m* (37. kép) tekintetbe venni. Legegyszerübb, ha ezen pont a' haladásnak l = 1 felel meg. Az első irány legyen m m′. Ha l = 1, lesz w = a, 's ha ezen szög a = R = 90°, akkor m pontban a' görbének iránya lesz mr′. Ha most a' haladás *m*-től viszsza felé, azaz k felé vétetik, akkor w értéke nő; tehát igenleges forgás közben a' haladás nemlegesen azaz r′ felé történik. Az által képeztetik a' folyam mka, melly végetlen forgással közelget a' kezdőponthoz *a*. Az (1) egyenletből látható, hogy a' forgások az első iránytól kezdve a' kezdőpontig csak egynemüek, azért (32. §. szerint) egy közönséges pontból, mint

m, ellenkezők lesznek, mig tehát a' nemleges haladás m-től r′ felé történt, addig a' forgás jobbra ment, vagyis mr′-től mk felé; az igenleges haladásra (mr) nézve, a' forgás balra, vagyis mr-től me felé történik. A' mi a' forgást mr-től me felé illeti, az nagyságára nézve mindig pótléka annak, melly egyenesen az egyenletből következik, 's pedig pótléka a' forgáshoz w = a, itt a' fertályszöghez, mivel a = 90° vétetett. A' mondottak szerint képeztetik az mbe rész, melly e ponttól végetlenül halad, 's mellynek iránya a' görbének első irányához *mm′* végnélkül közeledik; az m résztől k felé pedig végetlen forgással egy véges haladáshoz = 1 végnélkül közelget. Az igenleges ág tehát akmbe. A' mi az igenleges ágra nézve állítatott, ugyanaz a' nemleges ágra nézve is áll, melly az igenlegessel részarányos és azonos (37. kép) ak′m′bf. (37. kép)

B. Átmenőpontok.

33-dik § szerint valamint a' kezdőpont, úgy ezen görbének többi pontjai is közönségesek. A' görbének tehát nincs átmenőpontja.

C. Görbülés' foka.

Külzelés által van:

$$dw = \frac{-a\,dl}{l^2} = -\ al^{-2}\ dl,\ \text{vagy}$$

$$dw = -\frac{a}{l^2} = -\ al^{-2} = k.$$

D. Legnagyobb és legkisebb görbülés' pontjai.

1. Ha a' görbülés' egyenletében:

$$k = -\frac{a}{l^2},$$

$l = o$, akkor lesz $k = \infty$; tehát a' legnagyobb görbülés' pontja a' kezdőpont.

2. Ha $w = o$, lesz

$$k = -\frac{a}{l^2} = -\frac{aw^2}{a^2} = \frac{-w^2}{a} = o,$$

t. i. a' legkisebb görbülés' pontja ott van, hol az első irány létezik, vagyis ott, hol a' haladás már végetlen nagy.

E. Görbülésarány 's hasonlatosság.

A' görbülés' aránya következő:

$$k : k' = \frac{-a}{l^2} : \frac{-a}{l'^2} = l'^2 : l^2$$

vagy, mivel $l^2 = \frac{a^2}{w^2}$,

$$k : k' = \frac{a^2}{w'^2} : \frac{a^2}{w^2} = w^2 : w'^2.$$

Ezen egyarányból következik, hogy az (1) egyenletnek $w = \frac{a}{l}$ megfelelő görbék hasonlók, mivel az egyarány:

$$w^2 : w'^2 = (nw)^2 : (n\,w')^2,$$ mindig helyes.

3-dik FEJEZET.

Az eredeti egyenleteknek átvitele az öszrendesek' rendszerére.

§. 50.

Legyen ab (38. kép) valamelly görbének ívhossza; a' kezdőpont legyen *a*, 's *áb* görbének abban levő iránya aa', melly egyszersmind első irány lehet; b pontban pedig legyen az irány bb'; a' szerint lesz az *ab* ívnek irányváltozása $= \angle$ a' fb. (38. kép)

Ha tovább mn $\perp$ aa',

aa' $\parallel$ bp, akkor lesz:

$$\angle a'fb = \angle b'bp$$

tehát b'bp szög által is az *ab* ívnek irányváltozása határoztatik meg; ap és bp vonal, és ha cq $\parallel$ bp, egyszersmind aq és cq vonal is jelenti a' görbének függőleges öszrendeseit.

Ha *an* a' metszékek' tengelye, akkor

$$ap = x \text{ és}$$
$$bp = y$$

b pontnak öszrendesei.

Ha az ív' hossza ab = l még a' végetlen kis dl menynyiséggel nő, úgy hogy ac = l + dl; akkor lesz

$$pq = bd = dx.$$

és cd = dy; c pontban legyen a' görbének iránya cc', mellyet úgy tekinthetünk, mintha bb' irányával esnék össze, 's akkor lesz:

$$< c'cq = < b'bp = w.$$

A' bcd háromszögből következik:

(1) .. $dx = dl \, \text{Sin}\, w$ és

(2) .. $dy = dl \, \text{Cos}\, w$; és ezekből

(3) .. $\frac{dx}{dy} = \text{tang}\, w.$

Az (1) és (2) alatti alakokból következik még:

$$(\alpha) \ \frac{dx}{dl} = \text{Sin}\ w \text{ és}$$

$$(\beta) \ \frac{dy}{dl} = \text{Cos}.$$

Az (1) és (2) egyenlet a' görbéknek kiegyenesítésére is használható (Rectification). Ha t. i. az ív' hosszának meghatározása vagy a' metszék vagy a' rendes által kivántatnék, akkor a' görbének eredeti egyenletéből vagy w vagy Cos w vagy Sin w értéke határoztatik meg, ezen talált érték tétetik az (1) vagy (2) egyenletbe és az által egy külzeléki egyenlet ered, x és l, vagy y és l közt, mellynek egészitése után, a' megkivántatott egyenlet x és l, vagy y és l közt találtatik, és abból l értéke határoztatható.

§. 51.

Hogy valamelly görbének eredeti egyenlete, öszrendesekre vitethessék által, következő módok használhatók.

1. Az adott egyenlet' külzelése után, vagy az érték dl Sinwvagydl Cosw határoztatik meg, első esetben tétessék ezen talált érték $=$ dx, másodikban $=$ dy, az által a' nyert külzeléki egyenlet egészítetik, 's az állandó adatik hozzá, miáltal egy egyenlet ered w és x, vagy w és y közt; abból pedig fölkerestetik az érték tang w $= \frac{dx}{dy}$, 's ezen talált külzeléki egyenlet' egészitése a' kivántatott egyenletet adja.

2. Valamint x és w közti egyenletből, úgy abból is, melly y és w közt találtatott, határoztassék meg w, vagy ugyanazon függvényének értéke; a' két értéket az egyenlet' jelével összekötvén, a' kivántatott egyenlet x és y közt van megtalálva.

§. 52.

A' kör' eredeti egyenletének átvitele az öszrendesekre.

A' kör' egyenlete volt:

$$w = al.$$

Abból lesz külzelés által:

(1) .... $dw = adl.$

Sin w által sokszorozva:

$\sin w dw = adl \sin w$, vagyis

(2) ..... $\sin w\, dw = adx.$

Ha az (1) egyenlet Cos w által sokszoroztatik, lesz

$\cos w\, dw = adl \cos w$, vagyis

(3) .... $\cos w\, dw = ady,$

Ha az (2) és (3) egyenletet egészitjük: lesz;

(4) .... $-\cos w = ax + C$ és

(5) .... $\sin w = ay + c.$

Ha (2)ben $w = o$, akkor egyszersmind $x = o$, és ezen érték mellett (4)ben:

$$C = -1.$$

Ha (3) alatti egyenletben $= o$, lesz $y = o$, és azért (5)ben:

$$c = o.$$

Ha tehát az állandó (4) és (5)be tétetik, lesz:

(6) $\cos w = 1 - ax$ és

(7) $\sin w = ay$ tehát

$$\cos w^2 = 1 - 2ax + a^2x^2 \text{ és}$$

$$\sin w^2 = a^2y^2\text{, abból}$$

$$\sin w^2 + \cos w^2 = a^2y^2 + a^2x^2 - 2ax + 1$$

és mivel $\sin w^2 + \cos w^2 = 1$. lesz:

$$a^2y^2 + a^2x^2 - 2ax = o\text{, vagy}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{2x}{a} - x^2},$$

és ha $\frac{1}{a} = r$, lesz:

$$y = \pm\sqrt{2rx - x^2},$$

melly függőleges öszrendeseknek megfelelő *kör' egyenlete.*

BUDÁN,
A' MAGYAR KIR. EGYETEM' BETŰIVEL.
1 8 4 4.